Andrzej Wyszkowski

GRAFIKA KOMPUTEROWA W ANALIZIE LINIOWYCH UKŁADÓW REGULACJI

Zastosowania programu Mathcad

Andrzej Wyszkowski

GRAFIKA KOMPUTEROWA W ANALIZIE LINIOWYCH UKŁADÓW REGULACJI

Zastosowania programu Mathcad

Szczecin 2017

Książka opracowana na podstawie materiałów dydaktycznych, które w latach 2005–2010 autor wykorzystywał w prowadzeniu wykładów i ćwiczeń laboratoryjnych dla studentów kierunków nieelektrycznych na Wydziale Techniki Morskiej i Transportu w Zachodniopomorskim Uniwersytecie Technologicznym w Szczecinie.

We wprowadzeniu książki przedstawiono podstawy użytkowania programu Mathcad w zakresie niezbędnym do tworzenia wyrażeń matematycznych oraz wykorzystywania ich w analizie i wizualizacji procesów sterowania liniowych układów regulacji automatycznej. W pierwszej części rozdziału pierwszego zaprezentowano zależności i wzory opisujące charakterystyki podstawowych obiektów automatyki: inercyjnego pierwszego rzędu, inercyjnego drugiego rzędu, obiektu całkującego, obiektu różniczkującego. W drugiej części rozdziału pierwszego omówiono zagadnienia modelowania różnych wariantów klasycznych regulatorów proporcjonalno-całkująco-różniczkujących PID. W rozdziale drugim autor przedstawia zasady doboru typu regulatora do sterowania pracą inercyjnego lub całkującego obiektu automatyki wraz z badaniem stabilności tych układów regulacji. Ponadto w rozdziale tym zaprezentowano zastosowanie dodatkowej korekty sygnału sterującego jako sposób zmniejszenia wartości przeregulowania sygnału wyjściowego w układzie regulacji automatycznej. Ostatni, trzeci rozdział dotyczy zagadnień kompensacji wpływu zakłóceń na pracę układów regulacji z obiektami inercyjnymi pierwszego rzędu, które są sterowane przez regulatory proporcjonalno całkujące PI lub regulatory proporcjonalno różniczkujące PD, a także kompensacji wpływu zakłóceń na pracę układu regulacji z obiektem inercyjnym trzeciego rzędu, który jest sterowany przez regulator proporcjonalno-całkująco-różniczkujący PID. Ogół zagadnień oceny efektywności kompensacji wpływu zakłóceń na pracę liniowego układu regulacji automatycznej uzupełniono analizą kompensacji zakłóceń działających na rzeczywisty obiekt całkujący, który jest sterowany przez regulator proporcjonalno całkujący PI.

Przedstawione przykłady analizy właściwości liniowych obiektów automatyki i regulatorów oraz charakterystyki pracy wybranych liniowych układów regulacji automatycznej zilustrowano trójwymiarowymi wykresami, które stworzono w programie Mathcad-14.

Recenzenci:

prof. dr hab. inż. Jan Purczyński

dr hab. inż. Andrzej Banaszek

Korekta: Bernadeta Lekacz

© Copyright by Andrzej Wyszkowski

© Copyright by Uniwersytet Szczeciński, Szczecin 2017

ISBN 978-83-7972-161-0

WYDAWNICTWO NAUKOWE UNIWERSYTETU SZCZECIŃSKIEGO

Wydanie I. Ark. wyd. 11,5.

Spis treści

Przedmowa 4
Wprowadzenie 5
1. Podstawy użytkowania programu Mathcad 5
2. Tworzenie wyrażeń 6
3. Wykonywanie obliczeń 7
1. Badanie matematycznych modeli obiektów automatyki 8
1.1. Wprowadzenie 8
1.2. Podstawowe zależności i wzory 11
1.3. Charakterystyki obiektu inercyjnego pierwszego rzędu 12
1.4. Charakterystyki obiektu drugiego rzędu 24
1.4.1. Doświadczalne wyznaczanie stałych czasowych obiektu inercyjnego drugiego rzędu 38
1.5. Charakterystyki obiektu całkującego 42
1.6. Charakterystyki obiektu różniczkującego 52
1.7. Modelowanie regulatora PID 60
1.7.1. Charakterystyki czasowe regulatora PID-IND z idealnym algorytmem PID 62
1.7.2. Charakterystyki częstotliwościowe regulatora PID-IND z rzeczywistym różniczkowaniem 69
1.7.3. Charakterystyki amplitudowo-fazowe regulatorów PID-IND 70
1.7.4. Charakterystyki amplitudowo-fazowe regulatora PID-IND zróżniczkowaniem rzeczywistym 79
1.7.5. Charakterystyki amplitudowo-fazowe regulatora PI 86
1.7.6. Charakterystyki amplitudowo-fazowe regulatora PD 89
2. Badanie matematycznych modeli liniowych układów regulacji 92
2.1. Wprowadzenie 92
2.2. Charakterystyka liniowych obiektów i układów regulacji 93
2.3. Praktyczne zasady wyboru typu regulatora dla liniowych układów regulacji 94
2.4. Analiza układu automatycznie regulującego obiekt inercyjny 96
2.5. Analiza układu automatycznie regulującego obiekt całkujący rzeczywisty 106
2.6. Badanie stabilności układu automatycznie regulującego obiekt inercyjny 116
2.7. Badanie stabilności układu automatycznie regulującego obiekt całkujący rzeczywisty modelowany jako szeregowe połączenie z dwoma obiektami inercyjnymi pierwszego rzędu 120
2.8. Układ regulacji z dodatkową korekcją sygnału sterującego 121
3. Kompensacja zakłóceń przez układ regulacji 125
3.1. Wprowadzenie 125
3.2. Analiza kompensacji zakłóceń obiektu inercyjnego pierwszego rzędu sterowanego regulatorem proporcjonalno-całkującym PI 126
3.3. Analiza kompensacji zakłóceń obiektu inercyjnego pierwszego rzędu sterowanego regulatorem proporcjonalno-różniczkującym PD 134
3.4. Analiza kompensacji zakłóceń obiektu inercyjnego trzeciego rzędu sterowanego regulatorem PID 143
3.5 Analiza kompensacji zakłóceń rzeczywistego obiektu całkującego sterowanego regulatorem PI 147
Zakończenie 149
Literatura 150
Informacja o autorze 151

Przedmowa

Książka jest monografią, która przedstawia zagadnienia wizualizacji procesów sterowania w klasycznych układach automatycznej regulacji za pomocą grafiki i wykresów generowanych przez program komputerowy. Przedstawione w tej książce zbiory wykresów utworzone w programie komputerowym Mathcad-14 (wersja akademicka) charakteryzują właściwości dynamiczne wybranych modeli liniowych obiektów i układów regulacji.

Celem książki jest prezentacja możliwości programu komputerowego Mathcad w zastosowaniu do analizy wybranych procesów regulacji jako sposobu wspomagania pracy studenta, inżyniera i naukowca.

Program Mathcad zawiera zestaw procedur graficznych, które generują wykresy np. funkcji jednej i dwu zmiennych w układzie kartezjańskim lub biegunowym, wykresy powierzchniowe i warstwicowe, trójwymiarowe. Zmiana właściwości wykresów dokonywana jest przez wywoływanie poleceń, operatorów lub funkcji. Przyjazne użytkownikowi środowisko pracy programu Mathcad pozwala swobodnie określać wymiary wykresów, zakres obliczeń, automatycznie lub ręcznie skalować wykresy, wybierać liniowe lub logarytmiczne podziałki osi wykresów. Pola dialogowe menu użytkownika programu pozwalają na sprawne edytorskie opracowywanie dokumentów, np. nazywanie osi wykresu, dodawanie tytułu wykresu, wybieranie rodzaju oraz grubości i kolorów linii wykresu.

W przypadku opracowywania wykresów trójwymiarowych można dodatkowo dowolnie określać i zmieniać położenie punktu obserwacji albo perspektywę wykreślanej powierzchni lub jej przeźroczystość. Zmiany i korekty właściwości wykresu powierzchniowego dotyczące: ułożenia segmentów tworzących powierzchnię, umieszczania linii warstwicowych lub kolorowego cieniowania elementów powierzchni pozwalają na optymalne dostosowanie graficznej postaci obliczeń do wymaganych potrzeb.

Autor uznaje, że Czytelnik, opracowując własne analizy procesów, będzie miał dostęp do komputera z zainstalowanym programem Mathcad. Program ten jest narzędziem, które współpracuje z wzorami, liczbami, tekstem i wykresami. System pomocy tego programu lub podręcznik użytkownika w drukowanej postaci dla starszej wersji programu Mathcad - 5.0 przedstawia zasady działania programu i umożliwia praktyczne stosowanie tego naukowego i inżynierskiego narzędzia pracy, dlatego tylko niektóre właściwości programu Mathcad szczególnie istotne dla warunków analizy procesów regulacji są dokładnie opisywane.

Podstawową zasadą redakcyjnego opracowania zbioru wybranych przykładów i zamiarem autora monografii tematycznej było bezpośrednie przedstawienie zapisów edytora programu, tak by Czytelnik po samodzielnym wprowadzeniu odpowiedniego fragmentu zapisu do pliku roboczego programu mógł powtórzyć obliczenia.

Książka dedykowana jest dla studentów, inżynierów i pracowników naukowych kierunków nieelektrycznych, poznających zagadnienia sterowania w liniowych układach regulacji automatycznej.

Wprowadzenie

Przedstawione przykłady obliczeń zostały wykonane w dziedzinie czasu lub częstotliwości. Graficzne zobrazowania tych obliczeń mogą być podstawą i wzorem do analizowania procesów zachodzących w różnych dziedzinach techniki, a nie tylko podstaw regulacji i sterowania. Treść książki jest zestawiona zgodnie z logiczną kolejnością zdarzeń zachodzących w procesie projektowania układu regulacji. Na początku dokonywana jest identyfikacja obiektu sterowania i tworzony jest teoretyczny model tego obiektu, następnie tworzona jest koncepcja regulatora i układu regulacji, później analizowane są właściwości dynamiczne układu sterowania oraz skuteczność tłumienia oddziaływań czynników zakłócających pracę układu regulacji.

Oznaczenia i symbole stosowane w tej książce są powszechnie akceptowane i stosowane w częstotliwościowej analizie sygnałów. Autor zakłada, że Czytelnik zna teoretyczne podstawy rachunku zespolonego, operatorowego, częstotliwościowej analizy sygnałów i przekształcenie Laplace'a stosowane w celu wyznaczenia transmitancji jako stosunku transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego w obiekcie lub układzie regulacji. Transmitancja umożliwia wyznaczenie sygnału wyjściowego jako odpowiedzi układu na oddziaływanie określonego sygnału wejściowego. W złożonych układach jest to szczególnie istotne zagadnienie, albowiem zamiast układania i rozwiązywania skomplikowanego równania lub układów równań różniczkowych łączy się transmitancje elementów składowych – według prostych zasad – i otrzymuje transmitancję całego układu, którą można wykorzystać do analizy i projektowania układów liniowych.

Forma i redakcyjne opracowanie tekstu książki dostosowane są do prezentacji wyników analiz wybranych procesów zachodzących w obiektach i układach regulacji, także pomaga początkującym użytkownikom programu Mathcad poznać graficzne możliwości tego programu. Wszystkie zapisy przykładów ukazane w oknie programu Mathcad, niezbędne do przeprowadzenia obliczeń i przedstawienia ich w postaci wykresów, wykonane są czcionką typu Times New Roman. Zaprezentowane obok przykłady wprowadzania poleceń do roboczego okna dokumentu przedstawione są czcionką typu Arial i poprzedzone komendą Wpisz. Obsługa okna dokumentu programu Mathcad realizowana jest zgodnie z zasadami systemu Windows.

1. Podstawy użytkowania programu Mathcad

Wyrażenia matematyczne należy wprowadzać do roboczego okna zgodnie z matematyczną notacją, ale jeżeli istnieje zwykły matematyczny sposób na przedstawienie wyrażenia, równania, funkcji itd., to program wykona to polecenie. Program używa standardowych klawiszy klawiatury do wprowadzania wyrażeń. Wspomaga pracę użytkownika za pomocą wielu użytecznych palet zawierających używane operatory i symbole. Czarne kwadraciki pojawiające się w wywołanych wyrażeniach wskazują na czynności konieczne do wykonania. Części wyrażeń podświetlone czerwonym kolorem sygnalizują błędy, a także niemożliwe do zinterpretowania lub wykonania czynności. Wyjątkiem od tej reguły jest czerwony krzyżyk kursora programu. Wszystkie napisy pojawiają się na prawo i pod tym krzyżykiem.

Nazwy klawiszy funkcyjnych i innych klawiszy specjalnych zamknięte są w nawiasach kwadratowych, np. kierunkowe klawisze kursora [←], [↑], [→], [↓].

Wszystkie wciśnięcia lewego przycisku myszy w miejscach wskazanych przez wskaźnik edytora Windows (strzałka) odnoszą się do kursora programu (krzyżyk).

Wciśnięcie przycisku myszy, kiedy wskaźnik edytora nie wskazuje żadnego regionu lub klawisza, rozpoczyna proces wykonywania obliczeń, wyświetla wyniki obliczeń lub aktualizuje wykresy.

Program czyta i analizuje dokumenty od góry do dołu od strony lewej do prawej. Dlatego wprowadzanie kolejnych wyrażeń, definicji lub poleceń wykonania wykresów można dokonywać wszędzie poniżej i na prawo od wcześniej wprowadzonego wyrażenia. Tekst komentarza, notatki lub opis można wprowadzić do dokumentu obliczeniowego, tworząc w miejscu wskazanym przez kursor programu (krzyżyk) region tekstowy za pomocą polecenia Text Region z menu Insert. W regionie tekstowym kursor programu otoczony jest polem tekstu i zmienia się w znacznik wstawiania (pionowa kreska). W regionie obliczeń kursor programu jest punktem wstawiania (krzyżyk) lub polem wyboru ze znacznikiem obsługiwanym za pomocą klawiszy kursora lub myszki. Program pozwala wprowadzać równania i teksty w dowolnym miejscu dokumentu. Należy pamiętać, że każde wyrażenie, równanie, tekst lub wykres to prostokątny region. Regiony w wersji Mathcad-14 są białe i widoczne na szarym tle. W procesie obliczeń pole tekstowe jest pomijane. Otrzymanie czytelnego wydruku dokumentu wymaga oddzielnego umieszczenia regionów. Wciśnięcie klawisza **[F1]** przywołuje system bezpośredniej pomocy.

2. Tworzenie wyrażeń

Edytor równań programu Mathcad działa podobnie jak typowy edytor tekstu, jednakże składając automatycznie różne części wyrażenia wprowadzane przez użytkownika za pośrednictwem naciśnięć przycisku myszy lub odpowiednich klawiszy klawiatury, stosuje reguły hierarchicznego podporządkowania i zasad upraszczających wprowadzanie ułamków, wykładników, pierwiastków, indeksów wyrażeń. Edytor programu pomaga budować wyrażenia matematyczne, a nie jak w programie typu Word tylko wpisuje je do dokumentu.

Edytor programu Mathcad stosuje operatory „lepkie” w działaniach typu dzielenie, pierwiastkowanie, potęgowanie całkowanie i w innych operatorach typu Calculus. Zasada działania tych operatorów oznacza, że wszystko, co jest wprowadzane do któregokolwiek z nich, jest i będzie jego częścią aż do celowego przemieszczenia znacznika wstawiania w inne miejsce, tzn. aż do naciśnięcia przycisku myszy, kiedy kursor programu znajduje się poza regionem wyrażenia lub wskazuje inny operator albo inne miejsce wstawiania, np. czarny kwadracik.

Istotnym czynnikiem wpływającym na komfort pracy i efektywność wprowadzania lub poprawiania równań jest rozmiar wskaźnika wyboru w polu obliczeń. Ma on postać pionowej kreski, która może przemieszczać między znakami pisarskimi nazwy wyrażenia lub operatora, dostosowując długość swojej stopki do długości nazwy wyrażenia lub operatora.

W starszych wersjach programu ważnym i użytecznym pojęciem do poznania zasad działania edytora równań programu Mathcad lub potrzeb wprowadzania zmian w wyrażeniach był operator zasadniczy. Nowsze wersje programu nie posiadają tej właściwości, co sprawia, że wykonanie korekty bardzo często wymaga skasowania dużego fragmentu wyrażenia.

Operatorem zasadniczym wyrażenia matematycznego jest ten operator, który odnosi się do wszystkich czynników. W przykładzie wyrażenia: $(4 + 5)\cdot(7 - 2)$ operatorem zasadniczym jest operator mnożenia, ponieważ nie można zmienić niczego, co nie wpłynęłoby na wynik mnożenia.

Operator sumy (+) nie jest operatorem zasadniczym. Można zmieniać liczby i operator różnicy (–) w drugim nawiasie wyrażenia, nie wywołując zmiany wartości sumy pierwszego nawiasu.

Analogicznie operator różnicy (–) w drugim nawiasie przedstawianego przykładu również nie jest operatorem zasadniczym, ponieważ można zmieniać liczby i operator (+) w pierwszym nawiasie wyrażenia, nie wywołując zmiany wartości różnicy drugiego nawiasu.

Prostym sposobem wstawiania operatorów jest użycie odpowiednich klawiszy klawiatury w miejscu ustawionego wskaźnika wyboru lub posłużenie się myszą i paletą z graficznymi znakami operatorów.

Usuwanie części lub całości wyrażenia można wykonać, nie stosując wielokrotnego naciskania klawisza [**Del**] lub [**BkSp**]. Najpierw zaznaczamy obszar przeznaczony do usunięcia, następnie używamy komendy **Cut** (wytnij). Zaznaczenie obszaru do usunięcia wykonujemy poprzez wciśnięcie i trzymanie przycisku myszy w jednym z wierzchołków prostokąta pola wyboru. Następnie nie puszczając przycisku, przesuwamy mysz tak, by w polu wyboru znalazły się wszystkie elementy, które chcemy usunąć.

3. Wykonywanie obliczeń

Proces przygotowania równania i wykonania obliczeń rozpoczyna definiowanie zmiennych i określenie ich przedziałów.

Program ustala krok obliczeń na podstawie wartości pierwszej i drugiej liczby wpisanej do przedziału zmiennej, np. ω:=1,2..10. Krok obliczeń jest różnicą wartości drugiej i pierwszej liczby z przedziału zmiennej. Dla przedstawionego przykładu krok obliczeń wynosi k:=2–1=1. Liczba 10 jest ostatnią liczbą zakresu zmiennej ω.

Następnie definiujemy funkcję i jej nazwę oraz argumenty. Niech przykładowa funkcja będzie określona jako k(ω):=1+5·b·ω. Zmienną jest ω, natomiast parametrem o nieznanej jeszcze wartości lub zmienną może być b.

Program przyjmuje liczby rzeczywiste oraz zespolone w postaci arytmetycznej i wykładniczej. Posiada następujący zestaw funkcji i operatorów przeznaczonych do wykonywania działań na liczbach zespolonych: Im(z) – część urojona liczby z, Re(z) – część rzeczywista liczby z, arg(z) – argument liczby z (kąt zawarty między osią rzeczywistą a wektorem położenia liczby z, wynik obliczeń argumentu zawiera się między –π a π), |z| – wartość bezwzględna liczby zespolonej, $\bar{z}$ – liczba zespolona sprzężona z liczbą z.

Kolejną czynnością jest ustalenie formy przedstawienia wyników obliczeń (tabela wyników lub wykres).

Wykonujemy obliczenia.

Dla tabeli wyników ustalamy układ liczbowy wyświetlania wyników (standardem jest układ dziesiętny, dostępne są także układy binarne), ustalamy również postać wyniku (standardem jest notacja wykładnicza, dla której określamy próg notacji). Można wybrać postać dziesiętną, określić liczbę miejsc po przecinku i tolerancję. Formatowanie wyników jest czynnością odnoszącą się tylko do sposobu ich przedstawiania, program nadal zapewnia pełną dokładność wewnętrznych obliczeń.

Dla wykresu dwuwymiarowego x–y ustalamy np. kolor, grubość i rodzaj linii (ciągła, przerywana), typ skali (liniowa, logarytmiczna), automatyczne lub ręczne skalowanie, opis wykresu i opisy osi, typ opisu wartości liczbowych na osiach, wymiary wykresu (długość i szerokość).

Wykres powierzchniowy to perspektywiczny widok macierzy przedstawionej w postaci dwuwymiarowej siatki, która leży w trójwymiarowej przestrzeni. Wartość każdego elementu macierzy jest odwzorowana jako wysokość punktu leżącego na tej powierzchni.

Dla wykresu powierzchniowego można: wybrać przezroczystość lub nieprzezroczystość powierzchni, ustalić obecność lub brak osi, automatycznie lub ręcznie określić zakresy, zmieniać skalę pionowej osi wykresu, wybrać obecność lub brak skali na osiach, określić wielkość elementów tworzących powierzchnię, zamienić wykres powierzchniowy na słupkowy, wprowadzić opis osi i nazwę wykresu, wprowadzić skalę szarości lub kolorów na powierzchni (kolorowe cieniowanie powierzchni ukazuje największe wartości w kolorze czerwonym, a najmniejsze w kolorze granatowym, pośrednie wartości ukazywane są w postaci kolorowej tęczy), uzupełnić powierzchnię o kolorowe ślady warstwic lub zamienić wykres powierzchniowy na wykres warstwicowy, ustalić dowolny punkt obserwacji powierzchni (obracanie i przechylanie powierzchni).

Wykresy powierzchniowe mogą być wykonywane także jako parametryczne. Program Mathcad interpretuje odpowiednio określone elementy trzech dwuwymiarowych macierzy X, Y, Z o k-tej liczbie wierszy i n-tej liczbie kolumn jako współrzędne x, y, z punktów wykresu i wykreśla tę powierzchnię dla ustalonych wartości kąta pochylenia i kąta obrotu.

Łącząc definiowanie zmiennych i funkcje programu, można łączyć równania i wykorzystywać do kolejnych obliczeń wcześniej otrzymane wyniki.

1. Badanie matematycznych modeli obiektów automatyki

1.1. Wprowadzenie

Automatyka jako dziedzina nauk technicznych stosuje modelowanie matematyczne do analizy statycznych i dynamicznych właściwości urządzeń, w których zachodzą procesy przemiany energii lub przebiegają procesy technologiczne powodujące określone zmiany fizyczne lub chemiczne materii. Umiejętność matematycznego opisywania i badania właściwości obiektów jest przydatna w projektowaniu układów automatycznej regulacji.

Matematyczne modele obiektów tworzone są na podstawie analizy procesu zmian sygnałów wyjściowych obiektu, które zostały wywołane przez oddziaływanie znanych sygnałów wejściowych. Modele obiektu mogą opisywać statyczne i/lub dynamiczne właściwości obiektu.

W modelu statycznych właściwości obiektu wartości sygnałów wyjściowych zależą tylko od aktualnych wartości sygnałów wejściowych. W modelach dynamicznych właściwości obiektu i wartości sygnałów wyjściowych zależą także od wartości sygnałów w chwilach poprzednich.

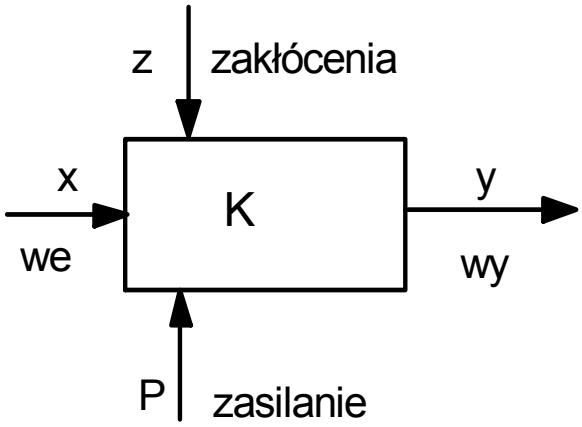
Obiekty i ich statyczne lub dynamiczne modele opisywane są funkcjami liniowymi lub nieliniowymi. W statycznym modelu obiektu liniowego sygnał wyjściowy opisany jest równaniem linii prostej w postaci**:** $y = a \cdot x + b$, gdzie a i b są współczynnikami o stałych wartościach (liczbami); w pozostałych przypadkach zależność **y** jest nieliniowa. Właściwości obiektu mogą być opisane równaniem różniczkowym w postaci $dy(t)/dt = a \cdot y(t) + b \cdot x(t)$. Jeśli **a** i **b** będą liczbami

(współczynnikami o stałych wartościach), to równanie będzie liniową funkcją zmiennych i ich pochodnych.

Dla obiektu, który opisywany jest modelem liniowym, na podstawie znajomości odpowiedzi obiektu na działanie określonego sygnału wejściowego można wyznaczać sygnał wyjściowy dla działania innego sygnału wejściowego. Dla obiektów nieliniowych nie ma takiej możliwości.

Wielu zjawisk zachodzących w technice nie można wyjaśnić za pomocą modeli liniowych. Modele nieliniowe są niezbędne. Wszędzie tam, gdzie możliwe jest stosowanie procesu uproszczonej analizy, stosuje się zasadę rozdzielenia procesu analizy na dwie części. W pierwszej części wykonuje się analizę nieliniowego modelu statycznego w szerokim zakresie oddziaływania zmiennych wejściowych, a w drugiej części – analizę liniowego modelu dynamicznego w ograniczonym (małym) przedziale oddziaływania zmiennych wejściowych. Upraszczanie modelu według tej zasady nazywane jest linearyzacją modelu. Należy zaznaczyć w tym miejscu, że parametry modelu zlinearyzowanego zależą od punktu pracy. Ale są przypadki, w których nie można stosować tej zasady. Przykładami nieliniowych modeli statycznych są: nasycenie, strefa nieczułości, luz mechaniczny, charakterystyki typu przekaźnikowego, np. przekaźnika dwupołożeniowego z histerezą lub bez histerezy, przekaźnika trójpołożeniowego z histerezą lub bez histerezy.

Model uproszczony (zlinearyzowany) obiektu może być dostatecznie dokładny dla potrzeb układów automatycznej stabilizacji parametrów procesu fizykochemicznego, sterowania nadążnego lub programowego, ponieważ układy realizujące te zadania utrzymują parametry procesu blisko punktu pracy. Uproszczony model może być niedostatecznie dokładny dla potrzeb rozruchu lub wyłączenia obiektu. W takich przypadkach stosuje się pomocnicze układy lub procedury sterowania zabezpieczające obiekt przed nieekonomicznym lub niepożądanym działaniem zwłaszcza w warunkach zagrożenia bezpieczeństwa eksploatacji obiektu lub bezpieczeństwa pracy pracowników obsługi.



Dla potrzeb analizy właściwości obiektów zakłada się, że wielkość lub wielkości P zasilające obiekt (o ile występują) nie zmieniają się, można uznać je za parametry o stałych wartościach, które są niezbędne dla prawidłowej pracy obiektu, ale nie wpływają na wielkość wyjściową. Dlatego w dalszych analizach nie wykazuje się zasilania P jako wielkości wejściowej. Jeżeli zmiany zasilania są istotne dla pracy modelu, to sygnał zasilania P wprowadza się do grupy sygnałów wejściowych.

Rys. 1.1. Model obiektu automatyki

Podstawowymi sposobami określania właściwości dynamicznych obiektów liniowych oraz liniowych układów automatyki są równania różniczkowe i wykresy czasowe sygnałów lub wykresy częstotliwościowe, transmitancje operatorowe. Istotną zaletą charakterystyk czasowych i częstotliwościowych jest możliwość doświadczalnego ich wyznaczenia.

Ze względów praktycznych (proste wykonanie) charakterystyki czasowe wyznacza się dla sygnału wejściowego $x(t) = A \cdot 1(t)$, gdzie A jest współczynnikiem skalującym wartość sygnału wejściowego.

Doświadczalne wyznaczenie charakterystyki czasowej obiektu to czynność pomiaru i rejestracji zmian sygnału wyjściowego $y(t) = 1(t) \cdot K(t)$, która jest związana z podaniem na wejście obiektu sygnału skoku jednostkowego i wykonaniem jednego eksperymentu w przedziale czasu $t \in (0, \infty)$. W praktyce pomiarowej eksperyment jest przerywany z chwilą określenia wartości końcowej procesu.

Do wyznaczania charakterystyk częstotliwościowych stosuje się sygnał wejściowy $x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha)$, gdzie: amplituda sygnału sinusoidalnie zmiennego nie zmienia się, a częstotliwość ω jest zmienną z przedziału $\omega \in (0, \infty)$. Doświadczalne wyznaczenie charakterystyki częstotliwościowej wymaga wykonania pomiarów amplitudy $B(\omega)$ i fazy $\beta(\omega)$ sygnału wyjściowego $y(\omega) = B(\omega) \cdot \sin[(\omega \cdot t + \beta(\omega)]$ oraz obliczenia różnicy faz $\varphi(\omega) = \beta(\omega) - \alpha$. Pomiary amplitudy i fazy sygnału wyjściowego wykonuje się po zaniku przebiegów przejściowych. Konieczność wykonywania pomiarów po zaniku przebiegów przejściowych znacząco wpływa na czas potrzebny do wyznaczenia charakterystyk częstotliwościowych zwłaszcza dla małych wartości częstotliwości.

Charakterystyka częstotliwościowa obiektu określa wzmocnienie $K(\omega) = B(\omega)/A$ jako zależność między amplitudami sygnału wejściowego i wyjściowego, a różnicę faz jako przesunięcie fazowe $\varphi(\omega)$. Stosując rachunek liczb zespolonych, można za pomocą jednej zależności przedstawić wzmocnienie i przesunięcie fazowe obiektu.

$$K(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \left|K(j\omega)\right| \cdot \left[\cos\varphi(\omega) + j \cdot \sin\varphi(\omega)\right], \text{ gdzie } j = \sqrt{-1} \text{ jednostka urojona.}$$

Wielkość $K(j\omega)$ nazywa się transmitancją widmową (w skrócie: transmitancją).

Moduł transmitancji $K(j\omega)$, wartość bezwzględna $\left|K(j\omega)\right|$ przedstawia wzmocnienie obiektu jako charakterystykę amplitudową, argument $\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{\operatorname{Im} K(j\omega)}{\operatorname{Re} K(j\omega)}$ przedstawia różnicę faz sygnału wyjściowego i wejściowego jako charakterystykę przesunięcia fazowego.

Charakterystyki częstotliwościowe przedstawia się w różnych układach współrzędnych. W prostokątnym układzie skal liniowych część rzeczywista $\operatorname{Re} K(j\omega)$ transmitancji oraz część urojona $\operatorname{Im} K(j\omega)$ transmitancji stanowią charakterystykę częstotliwościową.

Charakterystyki amplitudowe (moduł transmitancji w funkcji częstotliwości) najczęściej przestawiane są w prostokątnym układzie skal logarytmicznych, ponieważ wykresy lub ich fragmenty dla większości obiektów można w układach tych skal aproksymować odcinkami linii prostych.

Charakterystyki fazowe przedstawiane są w prostokątnym układzie liniowej skali argumentu i logarytmicznej skali częstotliwości.

W tabeli 1.3.2 przedstawiony jest przykład tworzenia wykresu funkcji dla czasowej charakterystyki obiektu inercyjnego pierwszego rzędu. W tabeli zawarto wykaz czynności i kolejność wykonywania poleceń.

1.2. Podstawowe zależności i wzory

Iloraz sygnału wyjściowego y(t) do sygnału wejściowego $x(t)$ to charakterystyka czasowa obiektu: $K(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$.

Jednostronne przekształcenie Laplace'a jest określone zależnością $L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t}\, dt = F(s)$, która funkcji $f(t)$ zmiennej rzeczywistej t przyporządkowuje transformatę F(s).

Transformata Laplace'a jest funkcją zmiennej zespolonej $s = \alpha + j \cdot \omega$.

Transformata Laplace'a jest operacją liniową, która dla: $x_1(s) = L[x_1(t)]$ i $x_2(s) = L[x_2(t)]$

spełnia równość: $L[a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)] = a \cdot L[x_1(t)] + b \cdot L[x_2(t)]$

Transformaty sygnału wejściowego $x(s)=L[x(t)]$ i sygnału wyjściowego $y(s)=L[y(t)]$ pozwalają określić model obiektu i jego właściwości.

Iloraz $K(s) = \frac{y(s)}{x(s)}$ transformaty y(s) sygnału wyjściowego do transformaty x(s) sygnału wejściowego obiektu automatyki to transmitancja operatorowa. Określa ona zależności różnych typów sygnału wyjściowego i wejściowego, niekoniecznie sinusoidalnie zmiennych, obejmuje stan ustalony i stany przejściowe.

Transmitancja operatorowa wyznaczona dla $s = j \cdot \omega$, ($\alpha = 0$) jest transmitancją widmową, która określa związek sygnałów wyjściowych i wejściowych obiektu dla stanu ustalonego.

Podstawową zaletą stosowania przekształcenia Laplace'a jest zastąpienie operacji całkowania i różniczkowania funkcji czasu f(t) operacjami algebraicznymi dzielenia i mnożenia transformaty F(s) przez operator s.

Stosując przekształcenie Laplace'a, możemy przedstawiać złożone zależności dynamiczne (ściślej: liniowe równania różniczkowe o stałych współczynnikach dla zerowych warunków początkowych) w postaci odpowiednio połączonych obiektów realizujących całkowanie, różniczkowanie, inercję, wzmocnienie.

Właściwości dynamiczne obiektu objawiają się dopiero przy dostatecznie szybkich zmianach sygnału wejściowego, np. skokach, za którymi sygnał wyjściowy obiektu nie nadąża.

Szybkość zmian sygnału na wyjściu obiektu określana jest za pomocą parametrów pomocniczych, np. stałych czasowych, tłumienia, wzmocnienia.

Przekształcenie odwrotne Laplace'a $L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot j} \int_{c-j\cdot\infty}^{c+j\cdot\infty} e^{s \cdot t} F(s) ds$

```
```

1.3. Charakterystyki obiektu inercyjnego pierwszego rzędu

Charakterystyka czasowa K(t) dla $x(t) = 1(t)$ $\quad K(t) = \frac{y(t)}{x(t)} = 1 - \exp\frac{-t}{T}$

Transmitancja widmowa $\quad K(j\cdot\omega) = \frac{1}{1 + j\cdot\omega\cdot T}$

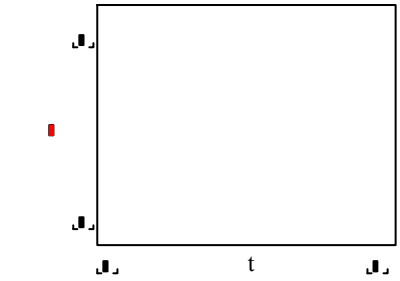
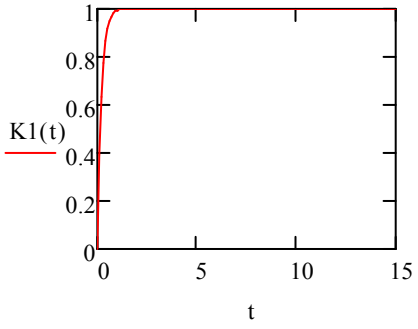
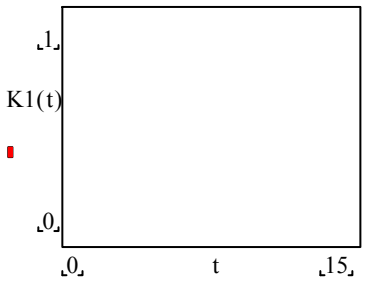
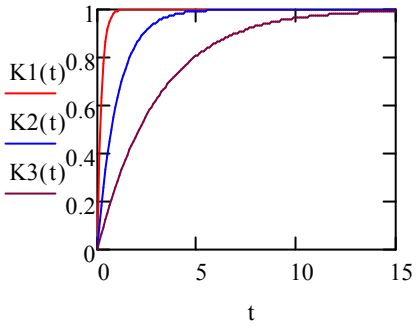
Moduł transmitancji widmowej $\quad |K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega\cdot T}}$

Argument transmitancji widmowej $\quad \varphi(\omega) = -\mathrm{arctg}(\omega\cdot T)$

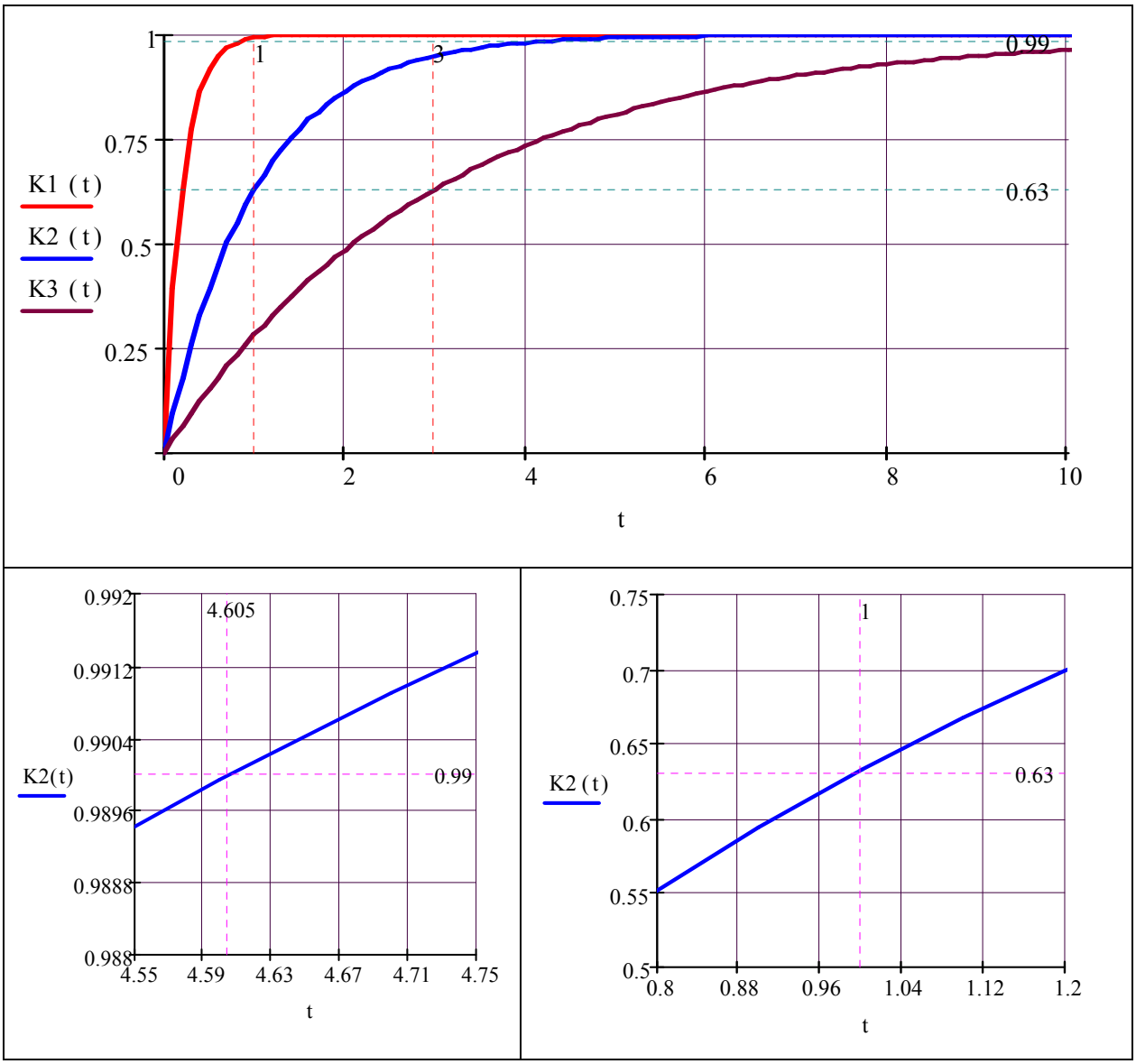
Tabela 1.3.1.

Pierwszy przykład obliczeń	Drugi przykład obliczeń
(okno robocze programu Mathcad) *– w polu tekstowym wpisz:* Transformata sygnału wejściowego Φ(t) = 1(t) (*Funkcja skoku jednostkowego, Heaviside'a*)	*(okno robocze programu Mathcad)* *– w polu tekstowym wpisz:* Transformata sygnału wyjściowego
– *wpisz:* Φ(t) – *kursorem zaznacz zmienną* t – *z menu Symbolics wybierz* ***Transform*** – *następnie kliknij myszą* ***Laplace*** Program wyświetli w wierszu niżej $\frac{1}{s}$ *Odpowiedź programu jest zależna od zmiennej s, ponieważ takiej notacji używa się powszechnie w odniesieniu do transformat Laplace'a.*	– *wpisz:* Φ(t)*(1–exp(–t/T)) – *kursorem zaznacz zmienną* t – *z menu Symbolics wybierz* ***Transform*** – *następnie kliknij myszą* ***Laplace*** Program wyświetli w wierszu niżej $\frac{1}{s\cdot(T\cdot s + 1)}$
Trzeci przykład obliczeń	
Komentarz: Transformata sygnału wejściowego dla x(t)= Φ(t)=1(t) wynosi $x(s) = \frac{1}{s}$ $K(s) = \frac{y(s)}{x(s)} \Rightarrow y(s) = x(s)\cdot K(s)$ $\frac{1}{s}\cdot K(s) = \frac{1}{s(1 + s\cdot T)}$ wyznaczona transmitancja ma zatem postać: $K(s) = \frac{1}{1 + s\cdot T}$	Obliczenie odwrotnej transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego – *wpisz:* 1/s*(1+s*T) – *w oknie roboczym programu pojawi się w miejscu kursora (krzyżyka)* $\frac{1}{s(1 + s\cdot T)}$ – *kursorem zaznacz zmienną* s – *z menu Symbolics wybierz Transform* – *następnie kliknij myszą Inverse Laplace* Program wyświetli w wierszu niżej $1 - e^{-\frac{1}{T}\cdot t}$ *Odpowiedź programu zależna jest od zmiennej t, ponieważ takiej notacji używa się powszechnie w odniesieniu do odwrotnych transformat Laplace'a.*

Tabela 1.3.2.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat: Charakterystyki czasowe obiektu inercyjnego pierwszego rzędu	Przykład obliczeń *Komentarz:* *Program pokazuje w roboczym oknie: dwukropek : jako symbol definicji := średnik ; jako dwie kropki ..*
$t := 0, 0.1 .. 15 \quad T1 := 0.2 \quad T2 := 1$ $T3 := 3$ $K1(t) := 1 - \exp\left(\frac{-t}{T1}\right) \quad K2(t) := 1 - \exp\left(\frac{-t}{T2}\right)$ $K3(t) := 1 - \exp\left(\frac{-t}{T3}\right)$     	*Określ zmienną t i stałe czasowe T1, T2, T3* – *wpisz*: t:0,0.1;15 T1:0.2 T2:1 T3:1 K1(t):1–exp(–t/T1) K2(t):1–exp(–t/T2) K3(t):1–exp(–t/T3) – *ustaw kursor programu (krzyżyk) poniżej równania* – *wywołaj wykres x– y komendą* [Schift]2 – *wpisz do pola wyboru dla osi x zmienną* t – *kliknij myszą znacznik osi* y *(kwadracik w połowie osi* y) – wpisz: K1(t), *pozostałe kwadraciki program uzupełni w procesie kreślenia wykresu* – *naciśnij:* [F9] *lub przycisk myszy poza obszarem wykresu, program wykona obliczenia i wykreśli wykres,* – *pozostałe wykresy otrzymasz, ustawiając znacznik wyboru na osi* y *bezpośrednio po wyrażeniu* K1(t), *następnie* – *wpisz:* **,** (przecinek) W następnym wierszu opisu osi y pojawi się znacznik – *wpisz:* K2(t),K3(t) – *naciśnij:* [F9] – *kliknij przyciskiem myszy dwukrotnie w polu wykresu, pojawi się paleta:* Formatting Currently Selected X–Y Plot – *z menu do wyboru charakterystycznych cech wykresu określ rodzaj skal (logarytmiczna lub liniowa), wybierz: rodzaje linii wykresu, kolory i grubość linii wykresu, opisy osi, formaty liczbowego opisu skal, automatyczne skalowanie…*

```
```



Rys. 1.3.1. Charakterystyki czasowe obiektów inercyjnych pierwszego rzędu, wartości stałych czasowych wynoszą: T1 = 0.2, T2 = 1, T3 = 3

Przyjmując, że sygnał wejściowy x(t) obiektu inercyjnego pierwszego rzędu jest funkcją skoku jednostkowego Heaviside'a i dla $t \geq 0$ ma wartość $x(t) = \Phi(t) = 1$, to sygnał wyjściowy y(t) tego obiektu określa zależność:

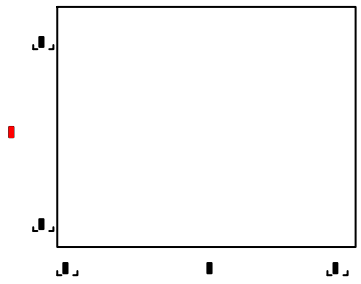
$$y(t) = \Phi(t) \cdot K(t) = 1 - \exp\frac{-t}{T}$$

jako charakterystyka czasowa/skokowa obiektu inercyjnego pierwszego rzędu.

Wprowadzenie linii pomocniczych (rys. 1.3.1) wykonujemy, korzystając z menu Formatting Currently Selected X–Y Plot, którego paletę otwieramy dwukrotnym naciśnięciem przycisku myszy. Kiedy kursor okna programu znajduje się w regionie wykresu, zaznaczamy polecenie **Show markers** (pokaż linie odniesienia). Przy każdej osi pojawiają się dwa znaczniki do wstawienia wartości.

Dla wyznaczonej charakterystyki czasowej obiektu inercyjnego pierwszego rzędu wartość stałej czasowej wyznaczamy, dokonując odczytu jej wartości (na skali czasu) dla wartości sygnału wyjściowego $y(T) = 1 - \exp(-1) \approx 0.63$. Prowadząc linię pomocniczą $y = 0.63$, na wykresie K1(t), K2(t), K3(t) wskazujemy wartości czasów stałych czasowych $T1 = 0.2$, $T2 = 1$, $T3 = 3$. Inną istotną właściwością elementu inercyjnego pierwszego rzędu jest czas potrzebny do ustalenia wartości sygnału wyjściowego na poziomie np. 0.99 wartości ustalonej. Z powiększonego obszaru charakterystyki K2(t) dla $T2 = 1$ odczytujemy wartość $t = 4{,}6 \cdot T2$ czasu, który jest potrzebny, by sygnał wyjściowy y(t) obiektu różnił się od wartości ustalonej o wartość mniejszą niż 1%.

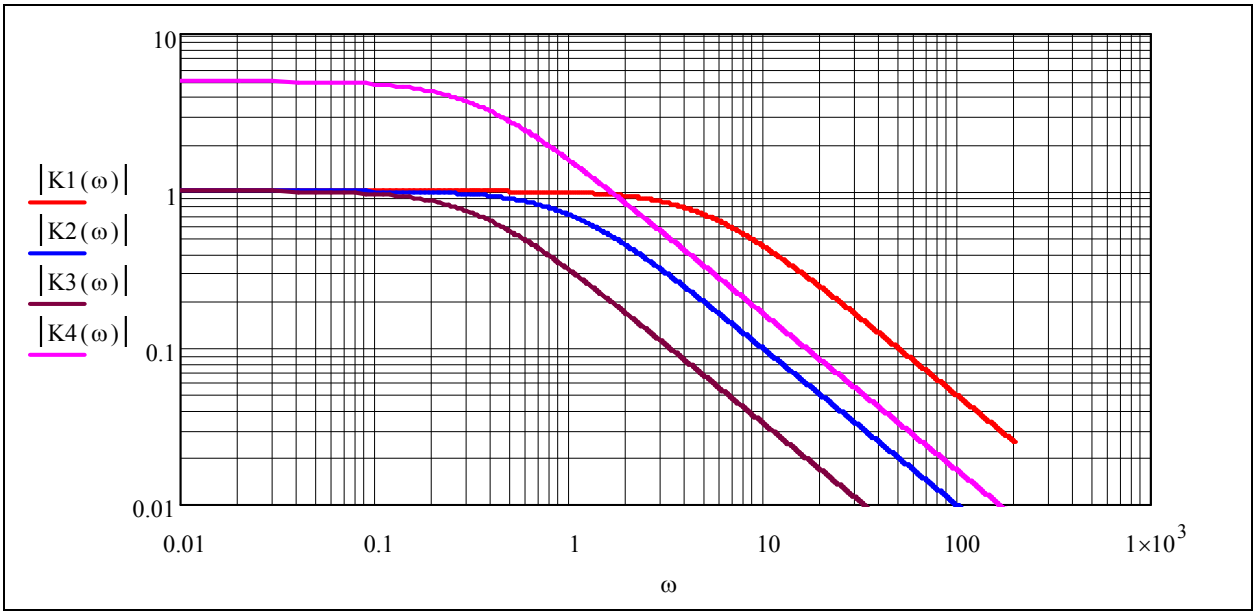
Tabela 1.3.3.

(okno robocze programu Mathcad) *– w polu tekstowym wpisz temat:* Charakterystyki amplitudowo-fazowe obiektu inercyjnego pierwszego rzędu	Przykład obliczeń *– wpis typu w*[Ctrl]g *zamienia literę* w *alfabetu polskiego na literę* ω *alfabetu greckiego* *– w programie Mathcad standardowym oznaczeniem urojonej części liczby zespolonej z jest litera* i
$i := \sqrt{-1}$ $\omega := 0.01 , 0.02 .. 100$ $T1 := 0.2$ $T2 := 1$ $T3 := 3$ $k := 1$ $K1(\omega) := \frac{k}{1 + i \cdot \omega \cdot T1}$ $K2(\omega) := \frac{k}{1 + i \cdot \omega \cdot T2}$ $K3(\omega) := \frac{k}{1 + i \cdot \omega \cdot T3}$ 	*Określ zmienną* ω *i stałe czasowe* T1, T2, T3 *w miejscach wskazanych przez kursor* *– wpisz:* i:\-1 *– wpisz:* w[Ctrl]g:0.01,0.02;100 *– wpisz:* T1:0.2 T2:1 T3:3 k:1 *– wpisz:* K1(w[Ctrl]g):k/1+i *w[Ctrl]g*T1 *– wpisz:* K2(w[Ctrl]g):k/1+i *w[Ctrl]g*T2 *– wpisz:* K3(w[Ctrl]g):k/1+i *w[Ctrl]g*T3 *– wskaż kursorem miejsce, w którym ma być utworzony wykres* *– wpisz:* [Shift]2 Dalej postępuj jak w przykładzie z tabeli 1.2. *Charakterystyki amplitudowe – moduł i argument transmitancji jako funkcje częstotliwości są przedstawione na rysunkach: 1.3.2, 1.3.3.*

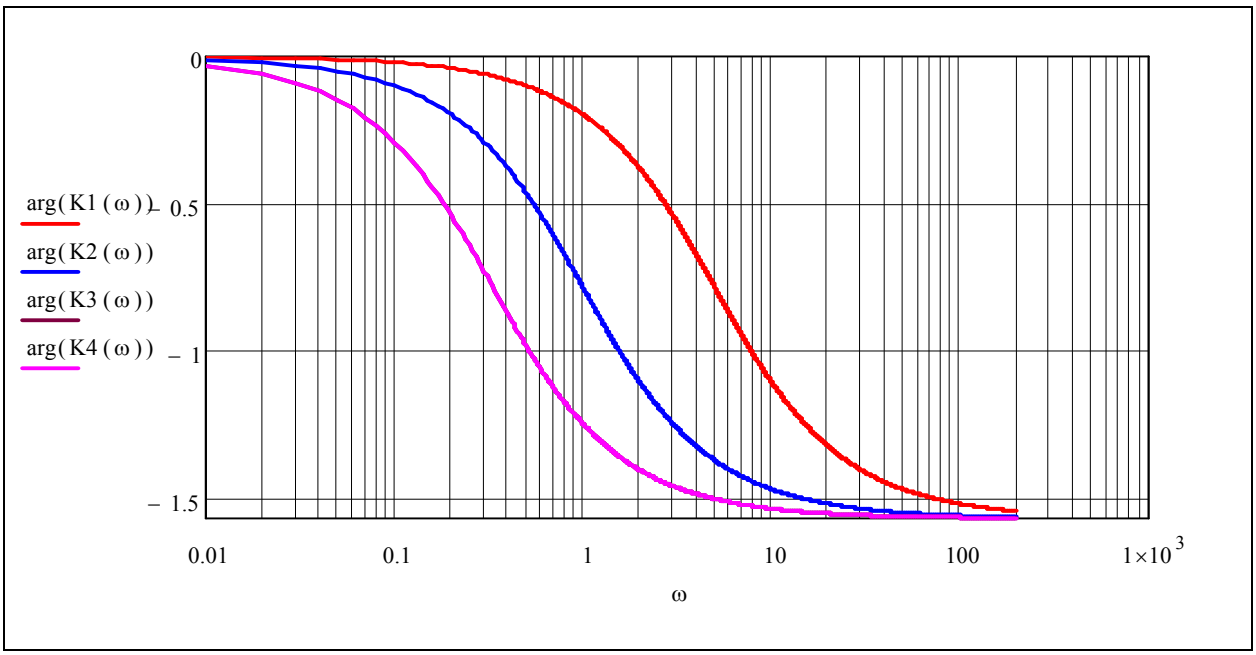
Należy zauważyć oczywistą właściwość funkcji $\arg K(\omega) = -\omega \cdot T$ obiektu inercyjnego pierwszego rzędu, że zmiana wartości wzmocnienia k obiektu nie zmienia przebiegu charakterystyki fazowej, ślady wykresów $\arg(K4(\omega))$ i $\arg(K3(\omega))$ pokrywają się.

Program Mathcad pozwala wykonać w postaci wykresu powierzchniowego wykreślonego w układzie współrzędnych prostokątnych łączne zestawienie charakterystyk czasowych obiektu jako funkcji dwóch zmiennych. W przypadku obiektu inercyjnego pierwszego rzędu dla łącznego zestawienia charakterystyk czasowych naturalną zmienną jest czas t, zmienną dodatkowo charakteryzującą właściwości tego obiektu jest stała czasowa T. Zakresy zmiennych T oraz t ustalamy, wprowadzając indeksowanie wartości tych zmiennych.

Zakładając rozmieszczenie punktów na osiach x oraz y, przyjmujemy najczęściej równomierne ich rozmieszczenie. Następnie dla analitycznej zależności modelującej charakterystykę czasową y(T, t) obiektu tworzymy macierz zawierającą wartości tej funkcji.



Rys. 1.3.2. Charakterystyki amplitudowe obiektów inercyjnych pierwszego rzędu, wartości stałych czasowych wynoszą: T1 = 0.2, T2 = 1, T3 = 3, k = 1, T4 = T3, k4 = 5



Rys. 1.3.3. Charakterystyki fazowe obiektów inercyjnych pierwszego rzędu, wartości stałych czasowych wynoszą: T1 = 0.2, T2 = 1, T3 = 3, k = 1, T4 = T3, k4 = 5

Podobnie jak w przypadku wykonywania zestawienia charakterystyk czasowych, można wykonać zestawienie amplitudowych charakterystyk częstotliwościowych. Zestawienie charakterystyk amplitudowych przedstawione na rysunku 1.3.5 wykonano dla założeń określonych w tabeli 1.3.5.

Tabela 1.3.4.

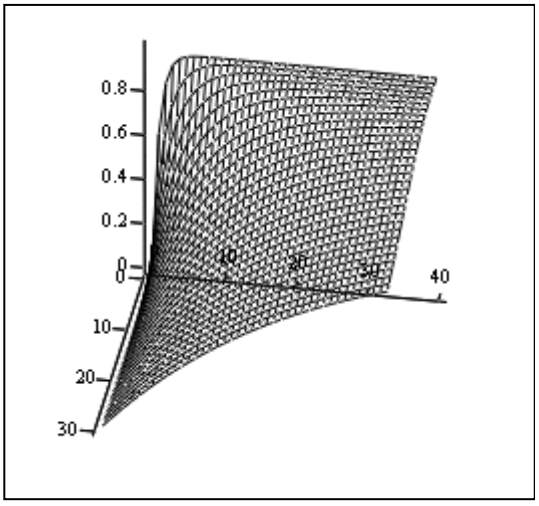
Przykład obliczeń
(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat: Charakterystyki czasowe obiektu inercyjnego pierwszego rzędu – zestawienie
Komentarz: – wywołanie macierzy $M_{m,n}$ wykonuje się przez wpisanie M[m, n – należy dodać, że indeks dolny **[** (nawias kwadratowy) jest operatorem lepkim i wszystko, co zostanie wpisane po **[**, pozostaje w polu tego operatora, wyjście z tego pola udostępnia np. dwukrotne naciśnięcie spacji lub kursora kierunkowego [→]

$n := 0 .. 40 \qquad t_n := 0 + 0.1 \cdot n$

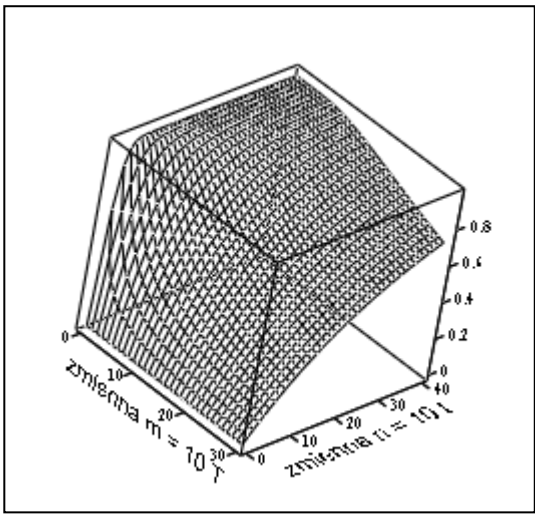
$m := 0 .. 30 \qquad T_m := 0.1 + 0.1 \cdot m$

$$K1(T,t) := 1 - \exp\left(\frac{-t}{T}\right)$$

$$M_{m,n} := K1\left(T_m, t_n\right)$$



M



M

Określamy zmienne wykresu jako: t i T

Określamy pomocnicze zmienne m i n do indeksowania zmiennych wykresu t i T

Określamy charakterystykę czasową obiektu K(T, t) dla sygnału wejściowego x(t) =Φ(t)=1 jako funkcję:

$$K1(T1,t) := 1 - e^{\frac{-t}{T1}}$$

– *wpisz:* n:0;40 t[n[→]:0+0.1*n

– *wpisz:* n:0,30 T[n[→]:0+0.1*n

– *wpisz:* K1(T, t):1–exp(– t/T)

– *wpisz:* M[m,n[→]:K1(T[m[→],t[n[→])

– *wywołaj wykres x–y–z komendą* [Ctrl]2

– *wpisz* M *do znacznika*

– *uruchom proces obliczeń* [F9]

– *kliknij przyciskiem myszy dwukrotnie w polu wykresu, pojawi się paleta:*
3 – D Plot Format

Z menu do wyboru charakterystycznych cech wykresu określ jego właściwości

– *wpisz lub zaznacz dla menu* **Genera**l (Rotation:15, Tilt:30, Twist: 30, Zoom: 0.95, Perimeter •, Surface •, Show Border **v** – kolor czarny, Show Box **v** – kolor czarny)
– *wpisz lub zaznacz dla menu* **Axes** dla **X-Axis** (Auto Grid **v**, Show Numbers **v**, Auto Scale **v**, Label **v** – stała czasowa x10,

cd. tabeli 1.3.4.

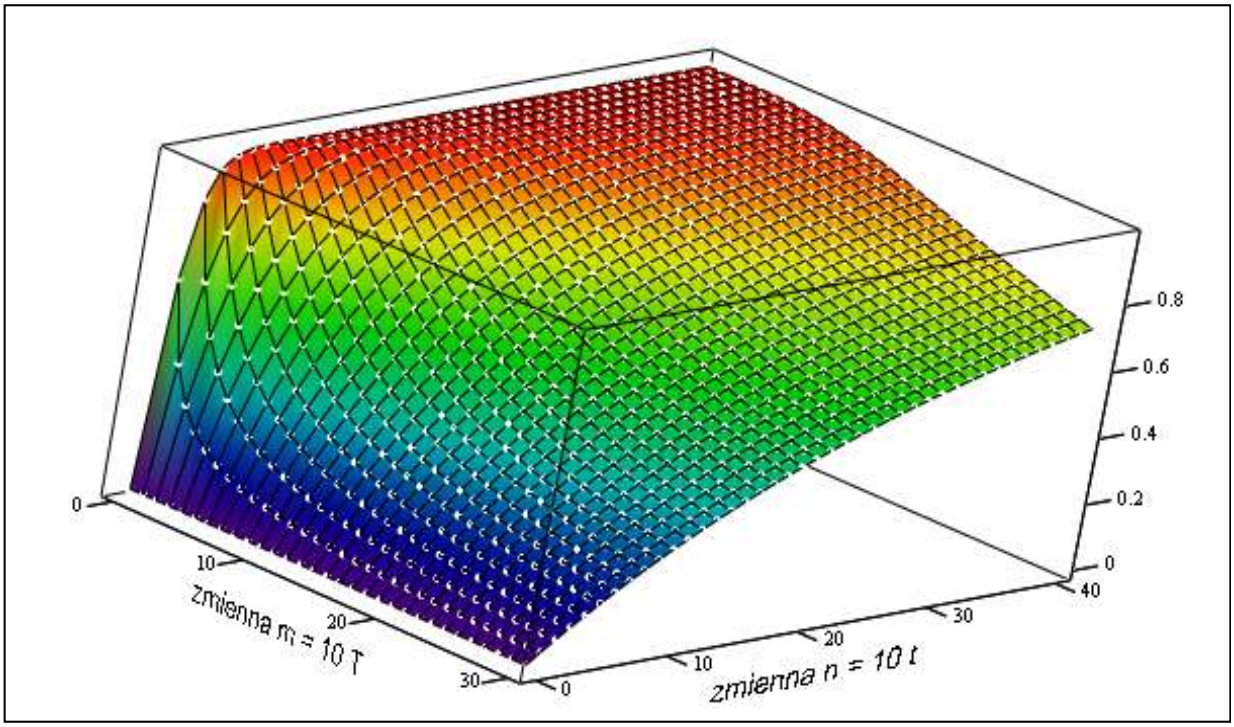
Należy zauważyć, że wykres jest skalowany dla pomocniczych zmiennych m i n. Zmienne rzeczywiste T i t są dzie-sięciokrotnie mniejsze. Warunki indekso-wania elementów macierzy określają liczby m i n jako dodatnie i całkowite.	Axis Color **v** – czarny, Axis weight 1.0) **dla Y-Axis** (Auto Grid **v**, Show Numbers **v,** Auto Scale **v**, Label **v** – czas x10, Axis Color **v** – czarny, Axis weight 1.0) **dla Z-Axis** (Auto Grid **v**, Show Numbers **v**, Auto Scale **v**, Label **v** – czas x10, Axis Color **v** – czarny, Axis weight 1.0) – *wpisz lub zaznacz dla menu* **Apperance Plot1** (Fill Surface **v**, Coiormap •, Smooth Shading **v**, Wireframe •, Weight 0.6, Solid color – czarny, Draw Points – dots, Size 1.5, Solid color •)

Tabela 1.3.5.

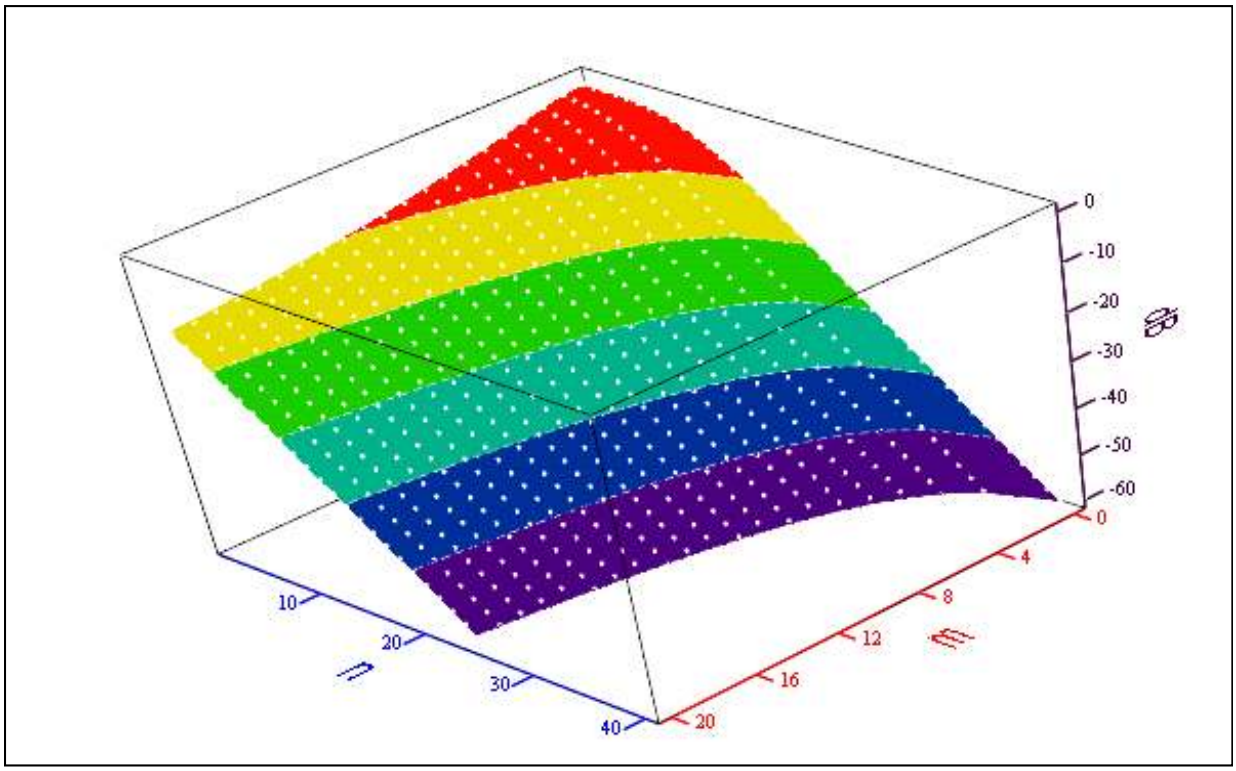
Przykład obliczeń	
(okno robocze programu Mathcad) *– w polu tekstowym wpisz temat:* Charakterystyki amplitudowe obiektu inercyjnego pierwszego rzędu – zestawienie	*Komentarz: program Mathcad nie wprowadza dla wykresów powierzchniowych automatycznego wyboru typu skali, dlatego należy zakres zmian zmiennych i sposób ich wyboru (np. skala logarytmiczna) dostosować do potrzeb wykresu.*
$n := 1 .. 40 \qquad m := 0 .. 20$ $\omega_n := 10^{\frac{n}{10}}$ $T_m := 0.1 + 0.2 \cdot m$ $K(T,\omega) := 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 \cdot T^2}}\right)$ $M_{m,n} := K\left(T_m, \omega_n\right)$	– Zmienne pomocnicze: m, n – Zmienne podstawowe: ω, T (wykładniczo określony wybór wartości częstotliwości ω zmienia liniową skalę n w logarytmiczną skalę ω) – Moduł transmitancji jako funkcja dwóch zmiennych. – Macierz wartości modułu transmitancji.

Program udostępnia także możliwości graficznej modyfikacji wykresu powierzchniowego i wprowadzania uzupełnień. Na powierzchniach zestawień charakterystyk czasowych i amplitudowych (rys. 1.3.4, 1.3.5) dodatkowo zostały umieszczone punkty obliczonych wartości. Rysunek powierzchni zestawienia charakterystyk amplitudowych (rys. 1.3.5) został uzupełniony śladami kolorowych warstwic (lub inaczej poziomic) wartości sygnału wyjściowego.

Komputerowe wspomaganie procesu analizowania właściwości obiektów to również możliwość wykonywania wykresów parametrycznych. Niech przykładem będzie prezentacja właściwości charakterystyki amplitudowo-fazowej obiektu inercyjnego pierwszego rzędu, w którym zakładamy zmienność wzmocnienia obiektu w ograniczonym przedziale dla stałej czasowej spełniającej warunek T = constans. Transmitancję przedstawimy jako wykres jednego wektora $Y_{\omega,k} = \mathrm{Im}(K(\omega,k))$ w funkcji drugiego wektora $X_{\omega,k} = \mathrm{Re}(K(\omega,k))$ dla zmieniającej się wartości częstotliwości i wzmocnienia obiektu. Wartość dolnych indeksów odnosi się do wszystkich wektorów Y, X. Wykresy można przedstawić w postaci zbioru punktów, linii kropkowych lub linii ciągłych.



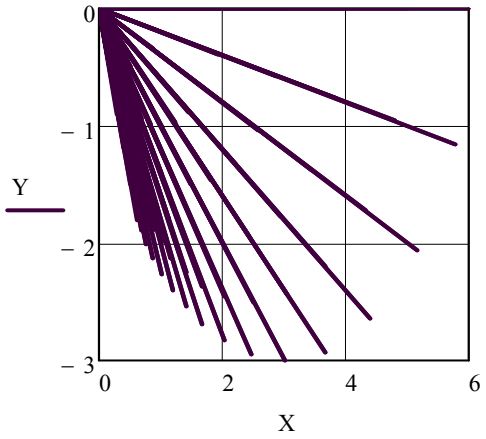
Rys. 1.3.4. Zestawienie łączne charakterystyk czasowych obiektu inercyjnego pierwszego rzędu dla stałej czasowej zmieniającej się w przedziale T∈ (0.1–3) w przedziale czasu t∈ (0.1– 4)

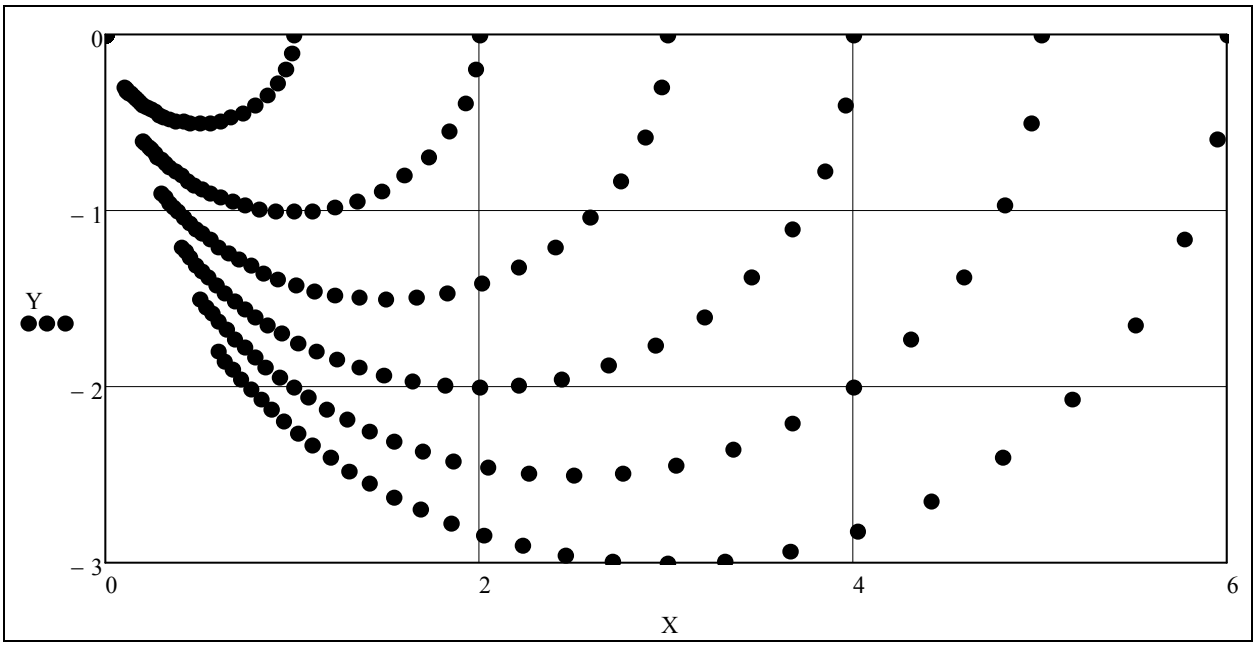


Rys. 1.3.5. Zestawienie charakterystyk amplitudowych obiektu inercyjnego pierwszego rzędu dla przedziałów zmiennych pomocniczych n∈(0, 40), m ∈(0, 20). Przedziały zmiennych podstawowych odpowiadające przedziałom zmiennych pomocniczych wynoszą ω∈ (1, 10000), T∈ (0.1–2)

```
```

Tabela 1.3.6.

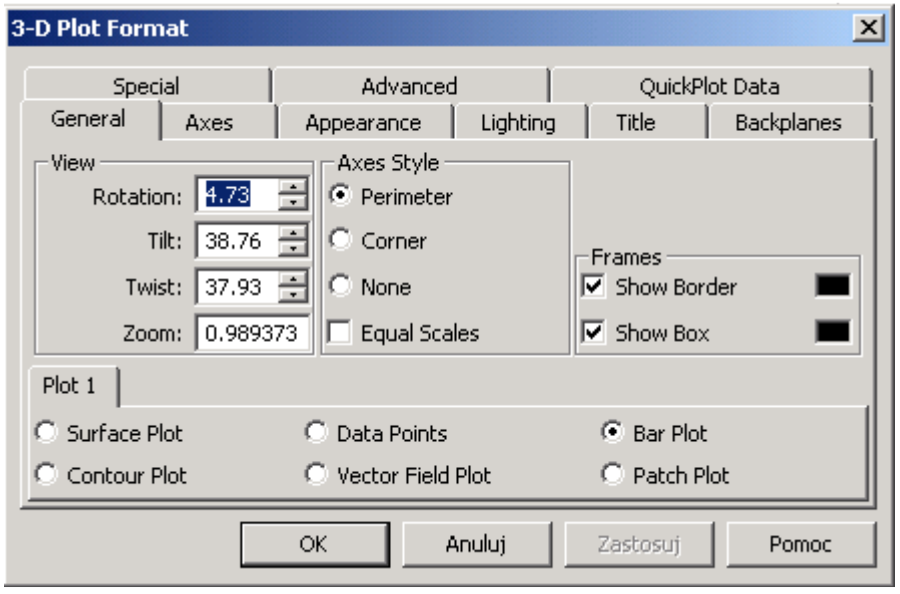
(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	Przykład obliczeń
Charakterystyki częstotliwościowe obiektu inercyjnego pierwszego rzędu	*Komentarz: Osi rzędnych y przyporządkowujemy macierz wartości zmiennej urojonej $Y_{\omega,k} = Im(K(\omega,k))$ dla wybranych wartości częstotliwości ω i wzmocnienia k. Osi odciętych x przyporządkowujemy macierz wartości zmiennej rzeczywistej $X_{\omega,k} = Re(K(\omega,k))$ dla wybranych wartości częstotliwości ω i wzmocnienia k. Określamy przedział zmian wzmocnienia, np. $k \in (1, 5)$, określamy przedział zmian częstotliwości, np. $\omega \in (0, 30)$.*
$i := \sqrt{-1}$ $\omega := 0,1..30$ $T := 1 \qquad k := 1, 2 .. 6$ $K(\omega,k) := \frac{k}{1 + i\omega \cdot \frac{T}{10}}$ $X_{\omega,k} := Re(K(\omega,k))$ $Y_{\omega,k} := Im(K(\omega,k))$  *Jeżeli dodatkowo wprowadzisz macierz* $Z_{\omega,k} := k$ *i wywołasz wykres powierzchniowy oraz wpiszesz w miejsce znacznika symbole macierzy X, Y, Z, to określając cechy wykresu, możesz otrzymać wykresy:* powierzchniowy *lub słupkowy (zob. rys. 1.3.7. 1.3.8).*	Określ: zmienną urojoną, przedział częstotliwości, stałą czasową**,** wzmocnienie. W miejscach wskazanych przez kursor – *wpisz:* i:\-1 – *wpisz:* w[Ctrl]g:0;30 – *wpisz:* T:1 k:1,2;4 Dla uproszczonej definicji zmiennych ω oraz k, które jednocześnie są indeksami macierzy, wymagane są wartości całkowite. – *wpisz:* K(w[Ctrl]g,k):k/1+i*w[Ctrl]g*T/10 – *wpisz:* X[w[Ctrl]g,k[→]:Re(K(w[Ctrl]g,k)) – *wpisz:* Y[w[Ctrl]g,k[→]:Im(K(w[Ctrl]g,k)) – *wskaż kursorem miejsce, w którym ma być utworzony wykres* – *wpisz:* [Shift]2 – *w polach opisu osi wykresu (kwadraciki) wpisz: dla osi odciętych **X**, dla osi rzędnych **Y*** – *dalej postępuj jak w przykładzie przedstawionym w tabeli 1.2* – *wybierz: cechy linii wykresu, w menu* **Formatting Currently Selected X–Y Plot Traces** *zastosuj*: **type lines-points**, Symbol – •, Symbol Weight – 2



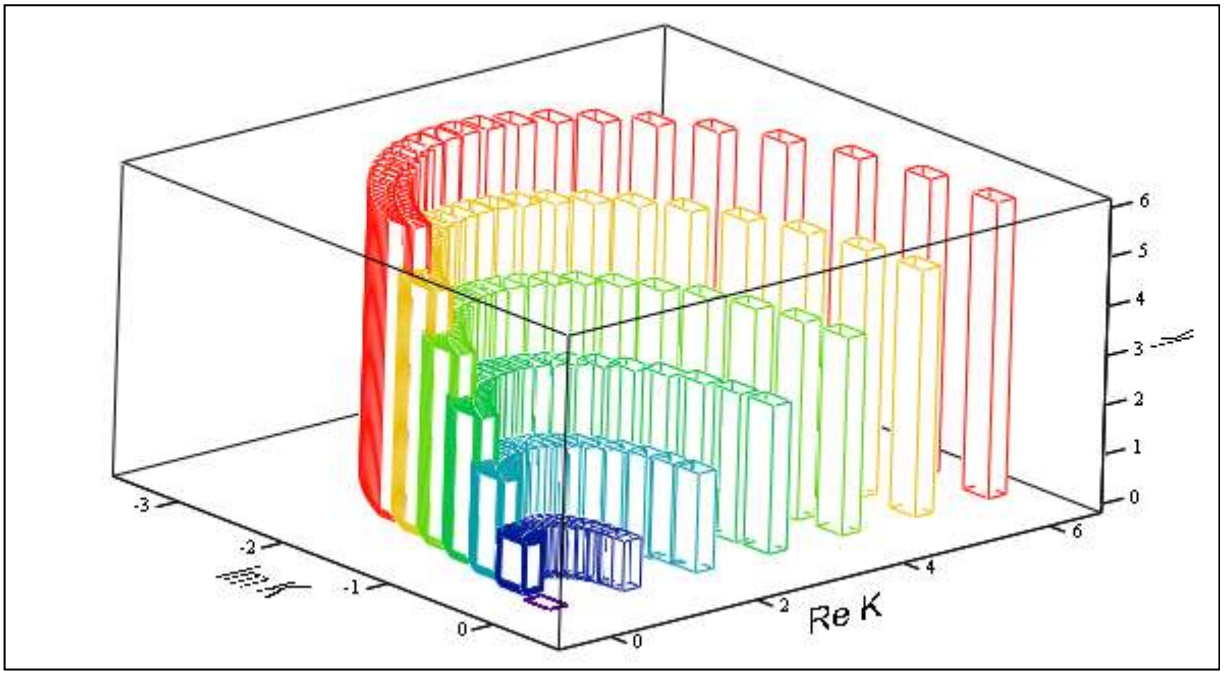
Rys. 1.3.6. Zestawienie charakterystyk częstotliwościowych $Y_{\omega,k} = Im(K(\omega,k))$, $X_{\omega,k} = Re(K(\omega,k))$ obiektu inercyjnego pierwszego rzędu na płaszczyźnie zespolonej dla stałej czasowej obiektu T = 1 i wartości wzmocnienia obiektu k = 1,2..6

Przedstawienie charakterystyki częstotliwościowej obiektu inercyjnego pierwszego rzędu w postali linii kropkowych (rys. 1.3.6) dla liniowej zmiany wartości częstotliwości w oczywisty sposób wskazuje na nieliniowe zmiany wartości urojonej i wartości rzeczywistej części transmitancji. Przestrzenną interpretacją tego zjawiska może być wykres słupkowy półokręgów utworzonych przez wartości charakterystyki częstotliwościowej wyznaczone dla stałych wartości wzmocnienia k (rys. 1.3.7).

Charakterystyczne cechy słupkowego zestawienia charakterystyk częstotliwościowych obiektu inercyjnego pierwszego rzędu można określić w menu 3 – D Plot Format, np. dla rysunku 1.3.7 podstawowe parametry zostały określone w zakładkach: General, Appearance, Axes.

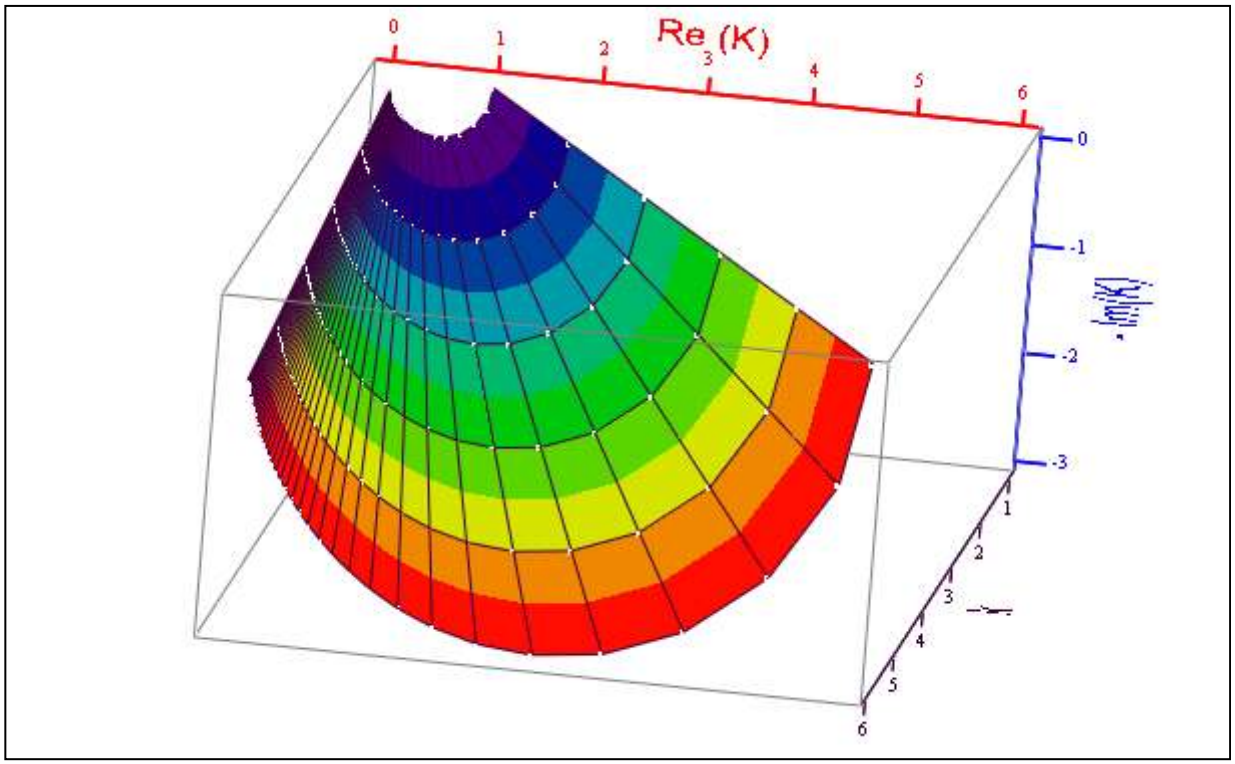


Okno menu parametrów wykresu otwieramy, ustawiając wskaźnik edytora Windows (strzałka) w obszarze wykresu, następnie naciskamy dwukrotnie lewy przycisk myszy.



(Y, X, Z)

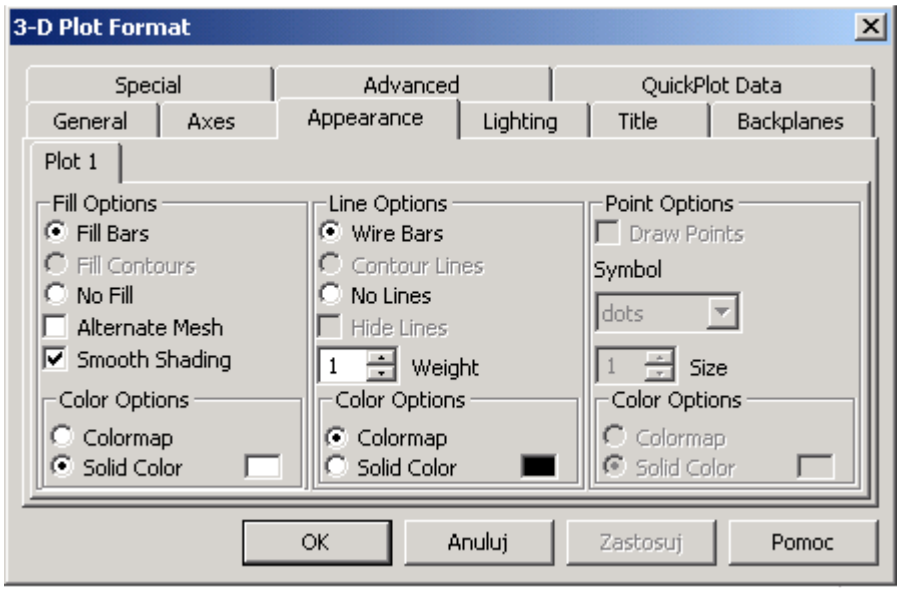
Rys. 1.3.7. Zestawienie wartości charakterystyk częstotliwościowych obiektu inercyjnego pierwszego rzędu wykonane dla T =1, ω = 1,2..30 i sześciu wartości wzmocnienia obiektu kp:=1,2..6



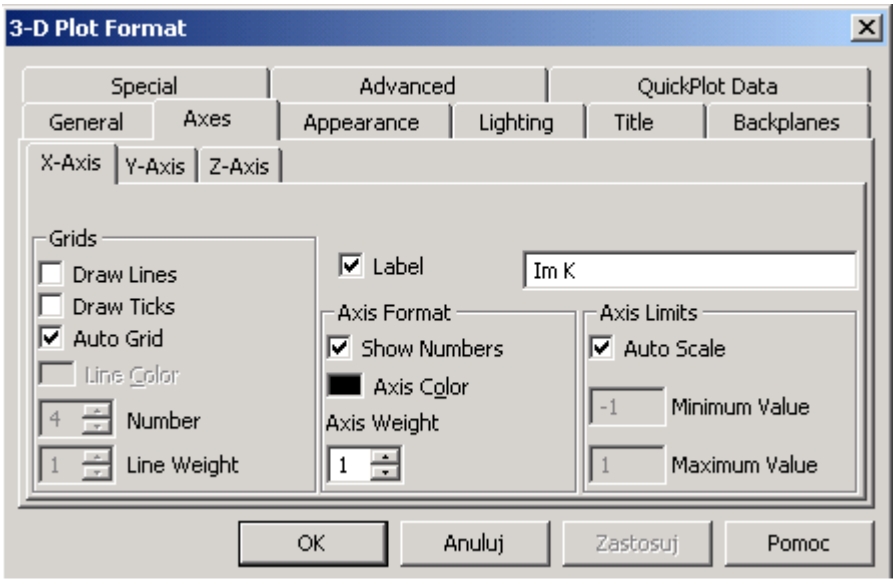
(X, Y, Z)

Rys. 1.3.8. Zestawienie charakterystyk częstotliwościowych obiektu inercyjnego pierwszego rzędu wykreślone w układzie kartezjańskim jako powierzchnia, na której leżą wartości sześciu wzmocnień obiektu

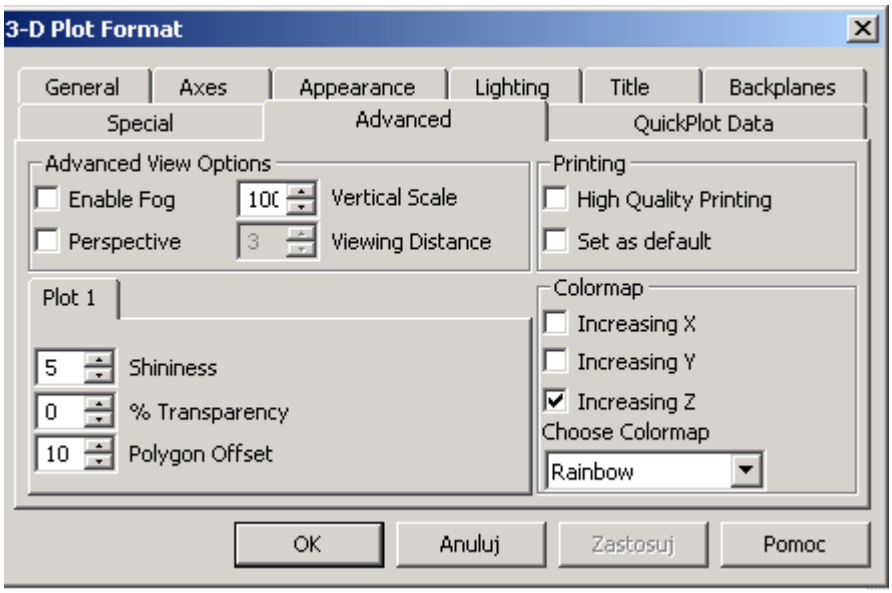
```
```



Kolor i cechy słupków (np. przenikanie) ustalamy w zakładce Appearance.



Opis wybranej osi wprowadzamy, wpisując odpowiedni tekst do zaznaczonego okienka Label.



Zawansowane cechy wykresu ustalamy w zakładce Advanced.

Punkt obserwacji wykresu można zmieniać nie tylko przez wpisywanie wartości (Rotation, Tilt, Twist), ale także używając wskaźnika edytora Windows. Wskaźnik edytora ustawiamy w obszarze wykresu. Przesuwając mysz z naciśniętym lewym przyciskiem, obracamy wykres w wybranym kierunku.

1.4. Charakterystyki obiektu drugiego rzędu

Nazwa obiekt drugiego rzędu odnosi się do obiektów ogólnie modelowanych za pomocą transmitancji w postaci: $\frac{1}{1+b\cdot s+a\cdot s^2}$ (1.4.0)

Tabela 1.4.1.

Programy komputerowe nie zawsze są doskonałymi produktami. Jako narzędzia wspomagające ludzką pracę muszą być kontrolowane, a wyniki pracy tych programów trzeba sprawdzać i oceniać. Przedstawiony niżej przykład potwierdza tę zasadę.		
Sygnał wyjściowy $y(t) = 1(t)\cdot K(t) = \Phi(t)\cdot K(t)$	Transformata sygnału wyjściowego y(s)	Transformata sygnału wyjściowego y(s) po rozwinięciu
$\Phi(t)\cdot\left(1-\frac{T1\cdot e^{\frac{-t}{T1}}}{T1-T2}+\frac{T2\cdot e^{\frac{-t}{T2}}}{T1-T2}\right)$	$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{(1+s\cdot T1)\cdot(1+s\cdot T2)}$	$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+s\cdot(T1+T2)+s^2\cdot T1\cdot T2}$
↓ Obliczenie transformaty Laplace'a	↓ Obliczenie odwrotnej transformaty Laplace'a	↓ Obliczenie odwrotnej transformaty Laplace'a
$\frac{1}{s\cdot(T1\cdot s+1)\cdot(T2\cdot s+1)}$ Wynik poprawny	$-\frac{T2^2-T2^2\cdot e^{-\frac{t}{T2}}-T1\cdot T2+T1\cdot T2\cdot e^{-\frac{t}{T1}}}{T1-T2}$ Wynik błędny, program Mathcad-14 *(niezgodność wymiarowa, transformata ma wymiar czasu – wynik jest dodatkowo pomnożony przez T2)*	$\frac{T1-T2-T1\cdot e^{-\frac{t}{T1}}+T2\cdot e^{-\frac{t}{T2}}}{T1-T2}$ Wynik poprawny, program Mathcad-15

Po podstawieniu T1 + T2 = b oraz T1·T2 = a do rozwiniętej postaci transformaty sygnału wyjściowego obiektu inercyjnego drugiego rzędu otrzymujemy ogólną postać wielomianu tej transformaty, która może opisywać właściwości:

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+s\cdot(T1+T2)+s^2\cdot T1\cdot T2}$$

– obiektu inercyjnego drugiego rzędu,
– szeregowego połączenia dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu,
– obiektu oscylacyjnego (wahadła).

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+b\cdot s+a\cdot s^2}$$

Odwrotna transformata Laplace'a określająca w dziedzinie czasu, dla x(t)=1(t), sygnał wyjściowy obiektu drugiego rzędu (obliczenia procesora symbolicznego programu Mathcad) ma postać wzoru:

(1.4.1)

$$K(t):=\left(-\frac{b\cdot\sinh\left(t\cdot\frac{\sqrt{-\frac{4\cdot a-b^2}{a^2}}}{2}\right)\cdot e^{-\frac{b\cdot t}{2\cdot a}}-a\cdot\sqrt{-\frac{4\cdot a-b^2}{a^2}}+a\cdot\cosh\left(t\cdot\frac{\sqrt{-\frac{4\cdot a-b^2}{a^2}}}{2}\right)\cdot e^{-\frac{b\cdot t}{2\cdot a}}\cdot\sqrt{-\frac{4\cdot a-b^2}{a^2}}}{a\cdot\sqrt{-\frac{4\cdot a-b^2}{a^2}}}\right).$$

Otrzymany wynik można zapisać w jawnej postaci, rozwijając funkcje hiperboliczne zmiennej zespolonej (sinus oraz kosinus hiperboliczny). Po rozwinięciu otrzymujemy:

$$Kr(t):=1-\frac{b}{\sqrt{4\cdot a-b^2}}\cdot e^{\frac{-b\cdot t}{2\cdot a}}\cdot\sin\left(\frac{\sqrt{4\cdot a-b^2}\cdot t}{2\cdot a}\right)-e^{\frac{-b\cdot t}{2\cdot a}}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{4\cdot a-b^2}\cdot t}{2\cdot a}\right) \qquad (1.4.1a)$$

Dla kolejnego podstawienia obejmującego zespolone wartości parametrów T1, T2 określone jako: $T1+T2=\frac{2\cdot\beta}{\omega_o}$ $T1\cdot T2=\frac{1}{\omega_o^2}$

otrzymujemy transformatę sygnału wyjściowego obiektu oscylacyjnego (wahadła).

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{\omega o}\right)^2+2\cdot\frac{\beta}{\omega o}\cdot s+1}$$

Sygnał wyjściowy obiektu oscylacyjnego (postać obliczona przez procesor symboliczny Mathcad) jest określony wzorem:

$$Ko(t):=-\frac{\cosh\left(t\cdot\sqrt{\beta^2\cdot\omega o^2-\omega o^2}\right)\cdot e^{-\beta\cdot t\cdot\omega o}\cdot\sqrt{\beta^2\cdot\omega o^2-\omega o^2}-\sqrt{\beta^2\cdot\omega o^2-\omega o^2}+\beta\cdot\omega o\cdot\sinh\left(t\cdot\sqrt{\beta^2\cdot\omega o^2-\omega o^2}\right)\cdot e^{-\beta\cdot t\cdot\omega o}}{\sqrt{\omega o^2\cdot\left(\beta^2-1\right)}}$$

(1.4.2)

Tabela 1.4.2.

Przykłady obliczeń charakterystyk czasowych.	
(okno robocze programu Mathcad) *– w polach tekstowych wpisz tematy:*	*Komentarz:*
Obiekt inercyjny drugiego rzędu $T1 := 4 \qquad T2 := 1 \qquad t := 0, 0.1 .. 20$ $Kid(t) := \Phi(t) \cdot \left(1 - \frac{T1 \cdot e^{\frac{-t}{T1}}}{T1 - T2} + \frac{T2 \cdot e^{\frac{-t}{T2}}}{T1 - T2} \right)$ (1.4.3)	Jednostki obliczeniowe czasu t oraz wartości stałych czasowych T1, T2 to sekundy [sek.]. Sygnał wejściowy obiektu $\Phi(t) = 1(t)$ to sygnał skoku jednostkowego. *Dla porównawczej oceny właściwości obiektów drugiego rzędu na wykresach charakterystyk czasowych przedstawiono dodatkowo dwie charakterystyki obiektów inercyjnych pierwszego rzędu oraz charakterystykę ich szeregowego połączenia.*
Obiekt inercyjny pierwszego rzędu $K1(t) := \Phi(t) \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{T1}} \right)$	*Stała czasowa T1 = 4 [sek.]*
Obiekt inercyjny pierwszego rzędu $K2(t) := \Phi(t) \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{T2}} \right)$	*Stała czasowa T2 = 1 [sek.]*
Szeregowe połączenie dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu $K3(t) := \Phi(t) \cdot K1(t) \cdot K2(t)$	*Dla obiektów nieobciążających się wzajemnie (obiekt następny sterowany jest sygnałem wyjściowym obiektu poprzedzającego bez poboru energii z wyjścia tego obiektu) transmitancja zastępcza szeregowego połączenia obiektów jest równa iloczynowi transmitancji tych elementów.*
Szeregowe połączenie dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu $K5(t) := \left(1 - e^{\frac{-t}{2 \cdot T2}} \right) \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{1.1 \cdot T1}} \right)$ (1.4.4)	
Obiekt oscylacyjny ω_o – częstotliwość rezonansowa, β – tłumienie $t := 0, 0.1 .. 20 \qquad \omega o := 1 \qquad \beta := 0.5$ $\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega o} \right)^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{\omega o} \cdot s + 1}$ $Ko(t) := -\frac{\cosh\left(t \cdot \sqrt{\beta^2 \cdot \omega o^2 - \omega o^2} \right) \cdot e^{-\beta \cdot t \cdot \omega o} \cdot \sqrt{\beta^2 \cdot \omega o^2 - \omega o^2} - \sqrt{\beta^2 \cdot \omega o^2 - \omega o^2} + \beta \cdot \omega o \cdot \sinh\left(t \cdot \sqrt{\beta^2 \cdot \omega o^2 - \omega o^2} \right) \cdot e^{-\beta \cdot t \cdot \omega o}}{\sqrt{\omega o^2 \cdot \left(\beta^2 - 1 \right)}}$	

Obiekt inercyjny drugiego rzędu

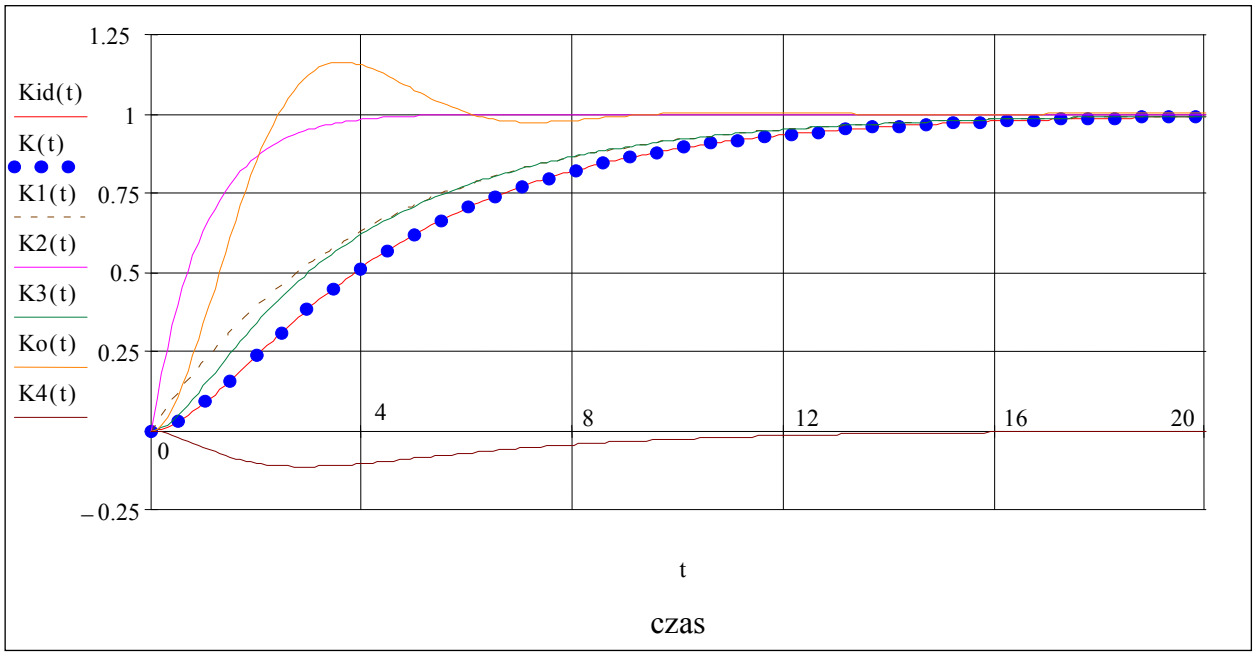
Dla ogólnej postaci transformaty sygnału wyjściowego, w której $b := T1 + T2 \quad a := T1 \cdot T2$, czasową charakterystykę obiektu drugiego rzędu określa wzór:

$$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 + b \cdot s + a \cdot s^2}$$

$$K(t) := \left(- \frac{b \cdot \sinh\left(\frac{t \cdot \sqrt{-\frac{4 \cdot a - b^2}{a^2}}}{2} \right) \cdot e^{-\frac{b \cdot t}{2 \cdot a}} - a \cdot \sqrt{-\frac{4 \cdot a - b^2}{a^2}} + a \cdot \cosh\left(\frac{t \cdot \sqrt{-\frac{4 \cdot a - b^2}{a^2}}}{2} \right) \cdot e^{-\frac{b \cdot t}{2 \cdot a}} \cdot \sqrt{-\frac{4 \cdot a - b^2}{a^2}} }{ a \cdot \sqrt{-\frac{4 \cdot a - b^2}{a^2}} } \right)$$

(1.4.5)

(Obliczenie odwrotnej transformaty Laplace'a jest przedstawione w trzecim przykładzie tabeli 1.3.1).



Rys. 1.4.1. Charakterystyki czasowe obiektów: inercyjnych pierwszego rzędu (K1, K2) i ich szeregowego połączenia K3(t), elementu inercyjnego drugiego rzędu Kid(t), różnicy K4(t) = Kid(t) – K3(t) sygnałów wyjściowych obiektu inercyjnego drugiego rzędu Kid(t) i szeregowego połączenia elementów inercyjnych pierwszego rzędu K3(t) wyznaczone dla stałych czasowych T1 = 4, T2 = 1, elementu oscylacyjnego Ko(t) z tłumieniem $\beta = 0.5$ i częstotliwością rezonansową $\omega_o = 1$ oraz K(t) – wzór 1.4.1

Należy zauważyć, że szeregowe połączenie dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu ze stałymi czasowymi T1 oraz T2 nie jest równoważne obiektowi inercyjnemu drugiego rzędu o takich samych wartościach stałych czasowych (wzory modelujące różnią się).

Potwierdzeniem tego spostrzeżenia jest wykres K4(t) = Kid(t) – K3(t) (zob. rys. 1.4.1) różnicy sygnałów wyjściowych obiektu Kid(t) inercyjnego drugiego rzędu i szeregowego połączenia elementów inercyjnych pierwszego rzędu K3(t).

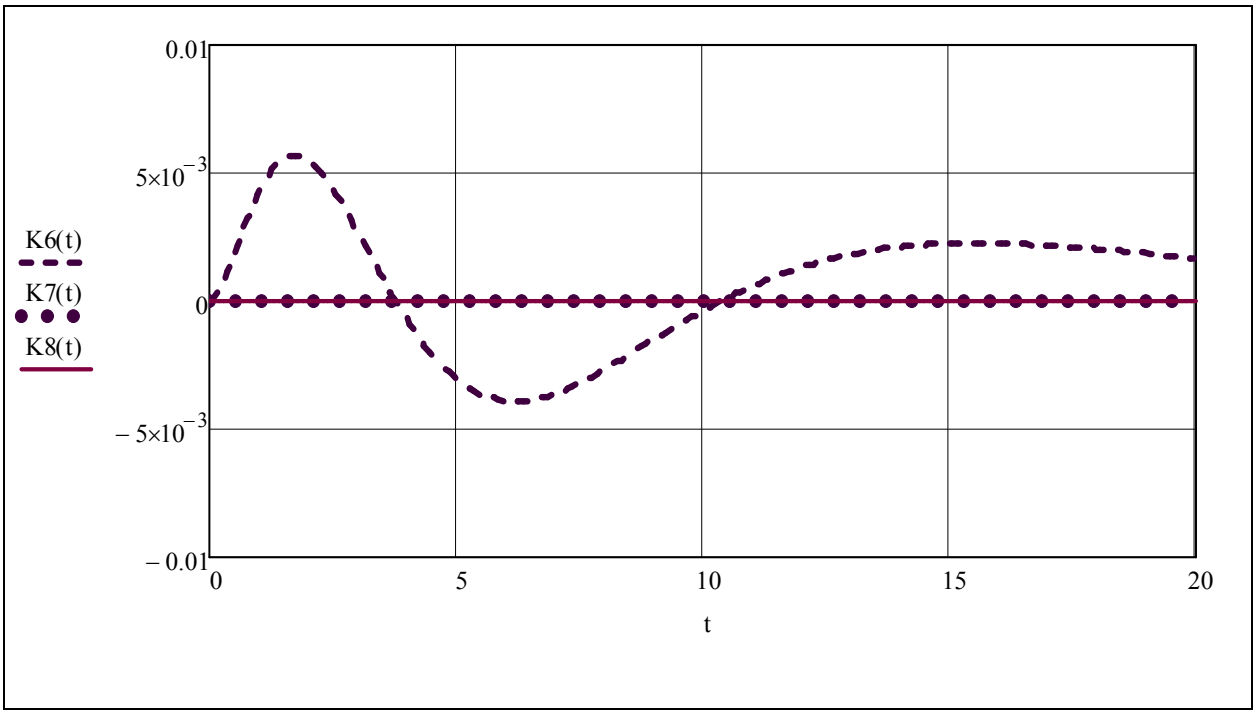
Różnica sygnałów wyjściowych obiektu inercyjnego drugiego rzędu i szeregowego połączenia obiektów inercyjnych pierwszego rzędu (z dodatkową korektą wartości stałych czasowych) określona jako K6(t) = Kid(t) – K5(t) może być mniejsza od 1% (zob. rys. 1.4.2).

Wartości stałych czasowych w zależności K5(t) dla szeregowego połączenia obiektów inercyjnych pierwszego rzędu tak określono (wzór 1.4.4; tab. 1.4.2), że dla celów praktycznych zastosowań można uznać równoważność modelu obiektu inercyjnego drugiego rzędu i szeregowego połączenia dwóch elementów inercyjnych pierwszego rzędu (rys. 1.4.2).

Wykres K7(t) na rysunku 1.4.2 wskazuje na równoważność zależności K(t) ogólnej postaci transformaty sygnału wyjściowego (wzór 1.4.1) i zależności Kid(t) (wzór 1.4.3), tzn. K7(t) = Kid(t) – K(t) = 0.

Na przykładzie zadania wyznaczenia optymalnych wartości stałych czasowych modelu zastępującego obiekt inercyjny drugiego rzędu (tab. 1.4.2) przedstawiony jest sposób sprawnego (nie tylko w inżynierskim znaczeniu) rozwiązywania zagadnień opisanych funkcjami wielu zmiennych.

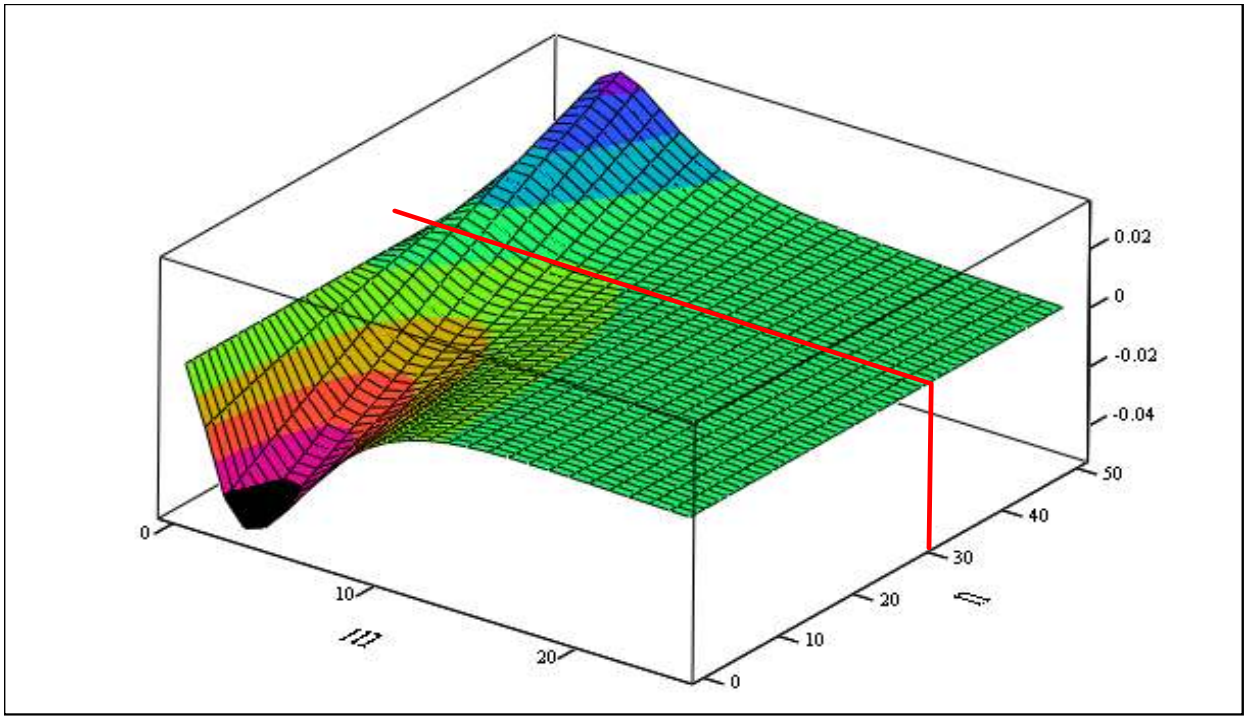
Graficzny sposób zestawienia wykresów funkcji dla określonych przedziałów zmiennych niezależnych i wpływających realizowany ze wspomaganiem programu Mathcad umożliwia (poprzez ocenę charakterystycznych cech otrzymanej powierzchni) wykonanie przeglądowych i porównawczych analiz wielu złożonych procesów z różnych dziedzin nauki i techniki.



Rys. 1.4.2. Różnice wartości sygnałów wyjściowych obiektu drugiego rzędu wynikające ze stosowania opisów równoważnych K7(t) = Kid(t) – K(t) = 0 lub zastąpienia obiektu drugiego rzędu przez szeregowe połączenia obiektów inercyjnych pierwszego rzędu K6(t) = Kid(t) – K5(t)

Tabela 1.4.3.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Optymalizacja wartości zastępczej stałej czasowej (b·T2) we wzorze (1.4.4) charakterystyki czasowej szeregowego połączenia obiektów inercyjnych pierwszego rzędu $T2 := 1 \qquad T1 := 4$ $m := 0 .. 25 \qquad n := 0 .. 50$ $t_m := m \qquad b_n := 1.4 + 0.02 \cdot n$ $k6(t,b) := 1 - \frac{T1 \cdot e^{\frac{-t}{T1}}}{T1 - T2} + \frac{T2 \cdot e^{\frac{-t}{T2}}}{T1 - T2} - \left(1 - e^{\frac{-t}{b \cdot T2}}\right) \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{1.1 \cdot T1}}\right)$ (1.4.6) $M_{m,n} := K6\left(t_m, b_n\right)$ Wykres powierzchni przedstawiono na rysunku 1.4.3.	*Obliczenia przeprowadzono w celu wyznaczenia parametrów modelu zastępującego obiekt inercyjny drugiego rzędu. Początkowa wartość pierwszej stałej czasowej obiektu K5(t) (patrz wzór 1.4.4) została zwiększona do wartości 1.1·T1).* Wartości stałych czasowych obiektu. Przedziały zmiennych pomocniczych (m, n), które określają ilość punktów równomiernie wykreślanych w kierunkach osi x, y. K6(t) = Kid(t)-K5(t) różnica sygnałów wyjściowych. Macierz wartości funkcji K6(t_m,b_n) – różnica sygnałów wyjściowych obiektu inercyjnego drugiego rzędu i jego przybliżonego modelu (szeregowe połączenie obiektów inercyjnych pierwszego rzędu).



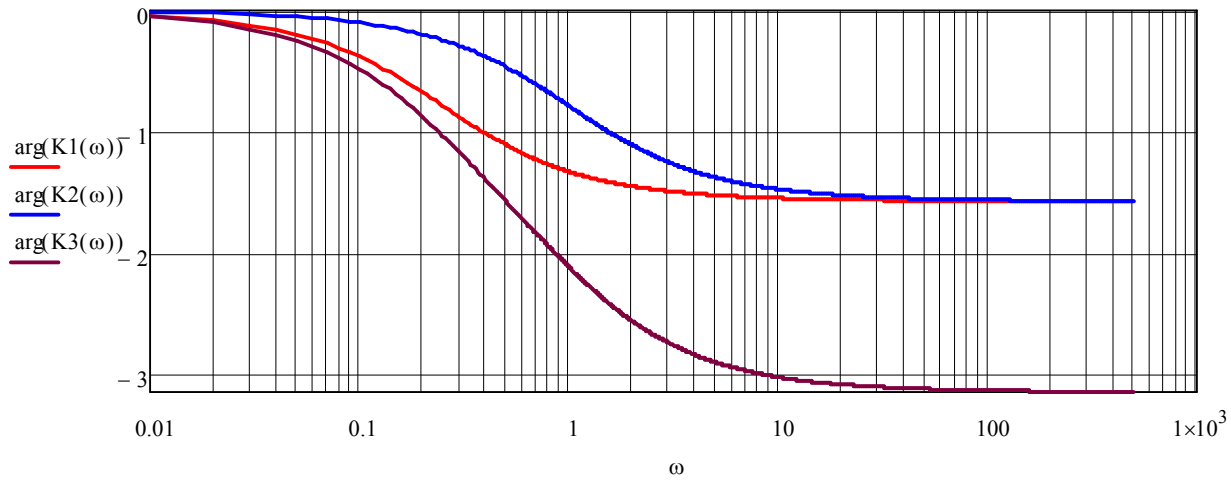
M

Rys. 1.4.3. Powierzchnia jako macierz wartości funkcji K6 – różnicy sygnałów wyjściowych obiektu inercyjnego drugiego rzędu i jego przybliżonego modelu

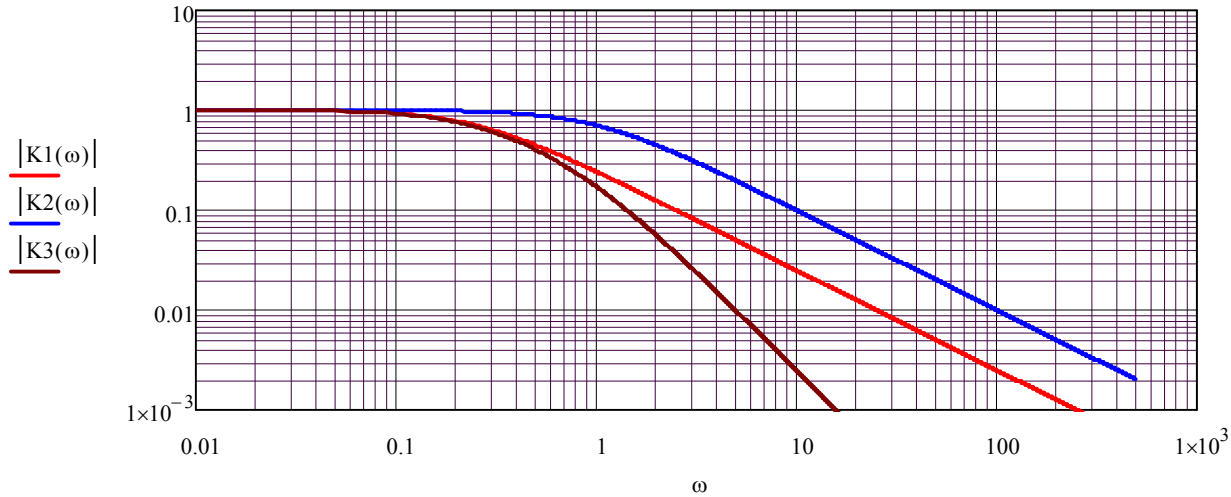
Na podstawie rysunku 1.4.3 określamy wartość zmiennej pomocniczej $n \approx 30$ (czerwony znacznik), dla której różnica sygnałów wyjściowych w całym zakresie zmian czasu (0–25 sek.) jest najmniejsza, dla $n = 30$ parametr wynosi $b = 2$. Dokładnie zmianę wartości różnicy sygnałów dla $b = 2$ przedstawia wykres K6(t) na rysunku 1.4.2.

Tabela 1.4.4.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki częstotliwościowe obiektów inercyjnych $i := \sqrt{-1}$ $\omega := 0.01, 0.02 .. 500$ $T1 := 4$ $T2 := 1$ $k := 1$ $K1(\omega) := \frac{k}{1 + i\cdot\omega\cdot T1}$ $K2(\omega) := \frac{k}{1 + i\cdot\omega\cdot T2}$ $K3(\omega) := \frac{k}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1)(1 + i\cdot\omega\cdot T2)}$	W zapisie transmitancji uwzględniono wzmocnienie k obiektu. Iloczyn w zapisie transmitancji jest równoważny szeregowemu połączeniu obiektów, które nie obciążają się wzajemnie.

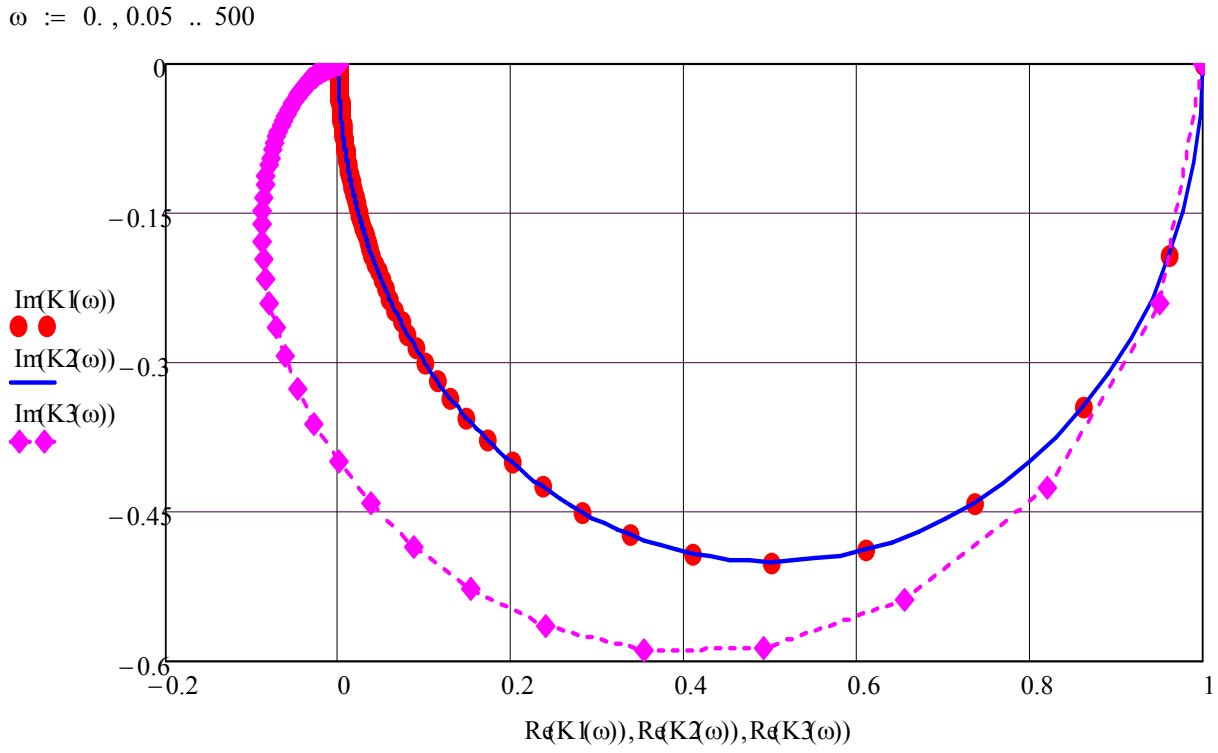


Charakterystyki argumentu (fazy)



Charakterystyki amplitudy (modułu)

cd. tabeli 1.4.4.



Charakterystyki częstotliwościowe

Podsumowanie właściwości obiektów inercyjnych drugiego rzędu

Na podstawie analizy porównawczej charakterystyk obiektów inercyjnych pierwszego i drugiego rzędu można stwierdzić, że w teorii sygnałów określane są one jako obiekty dolno przepustowe.

Charakterystyki częstotliwościowe tych obiektów (wykreślane na płaszczyźnie zespolonej) obejmują odpowiednio jedną (4) ćwiartkę płaszczyzny dla obiektu pierwszego rzędu oraz dwie ćwiartki (4 i 3) dla obiektu drugiego rzędu.

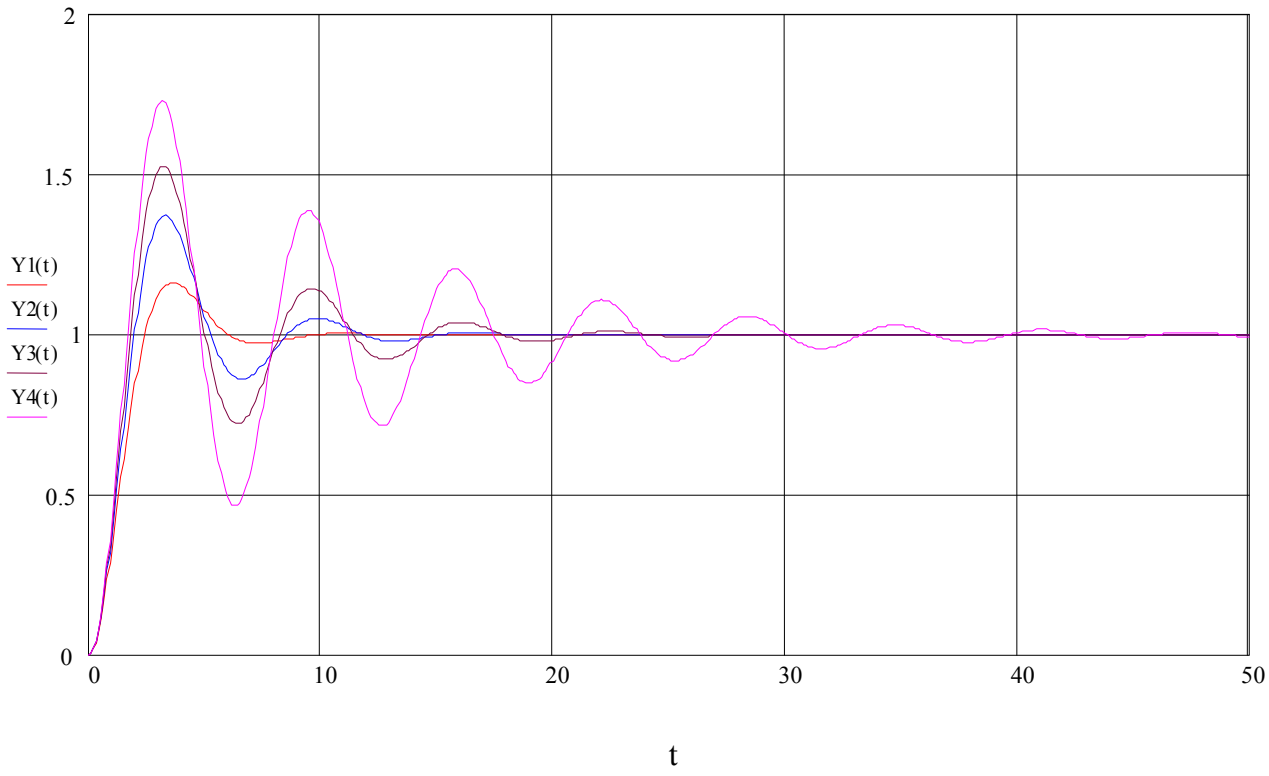
Charakterystyka amplitudowa (moduł transmitancji) wskazuje na malejącą o 20 dB wartość sygnału wyjściowego dla obiektu pierwszego rzędu i 40 dB dla obiektu drugiego rzędu na każdy dziesięciokrotny wzrost częstotliwości sygnału wejściowego powyżej częstotliwości granicznych określanych jako 1/T1, 1/T2.

Charakterystyki logarytmiczne modułu (inaczej amplitudy) obiektu inercyjnego drugiego rzędu są sumą charakterystyk amplitudowych obiektów inercyjnych pierwszego rzędu tworzących ten obiekt. Właściwość ta jest w oczywisty sposób określona przez logarytm iloczynu transmitancji dla szeregowego połączenia obiektów nieobciążających się wzajemnie.

Podobnie, charakterystyka argumentu (inaczej: przesunięcia fazowego lub skrótowo fazy) obiektu inercyjnego drugiego rzędu jest sumą przesunięć fazowych obiektów inercyjnych pierwszego rzędu tworzących ten obiekt. Zasada ta umożliwia sprawne wyznaczanie charakterystyk zastępczych złożonych obiektów automatyki na podstawie znajomości charakterystyk obiektów podstawowych.

Tabela 1.4.5.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki obiektu oscylacyjnego. $\frac{1}{s\cdot\left[\left(\frac{s}{\omega o}\right)^2+2\cdot\frac{\beta}{\omega o}\cdot s+1\right]}$ (1.4.7) $t := 0 , 0.1 .. 50 \quad \beta := 0.1 \quad \omega o := 1$	Transformata Laplace'a sygnału wyjściowego dla sygnału wejściowego x(t) = 1(t) – skok jednostkowy. Przedstawiony niżej wynik obliczeń procesora symbolicznego Mathcad przedstawiający zmianę sygnału wyjściowego (odwrotna transformata Laplace'a) obiektu oscylacyjnego wykorzystany został do wykreślenia wykresów zmian sygnału wyjściowego dla stałej wartości częstotliwości rezonansowej ωo i różnych wartości parametru β (tłumienia) (rys. 1.4.4).
Sygnał wyjściowy w dziedzinie czasu – charakterystyka czasowa $Y1(t) := -\frac{\cosh\left(t\cdot\sqrt{\beta^2\cdot\omega o^2-\omega o^2}\right)e^{-\beta\cdot t\cdot\omega o}\cdot\sqrt{\beta^2\cdot\omega o^2-\omega o^2}-\sqrt{\beta^2\cdot\omega o^2-\omega o^2}+\beta\cdot\omega o\cdot\sinh\left(t\cdot\sqrt{\beta^2\cdot\omega o^2-\omega o^2}\right)e^{-\beta\cdot t\cdot\omega o}}{\sqrt{\omega o^2\cdot\left(\beta^2-1\right)}}$ (1.4.8)	



Rys. 1.4.4. Sygnał wyjściowy obiektu oscylacyjnego dla wartości częstotliwości rezonansowej ωo = 1 i wybranych wartości tłumienia $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.2$, $\beta_3 = 0.3$, $\beta_4 = 0.5$

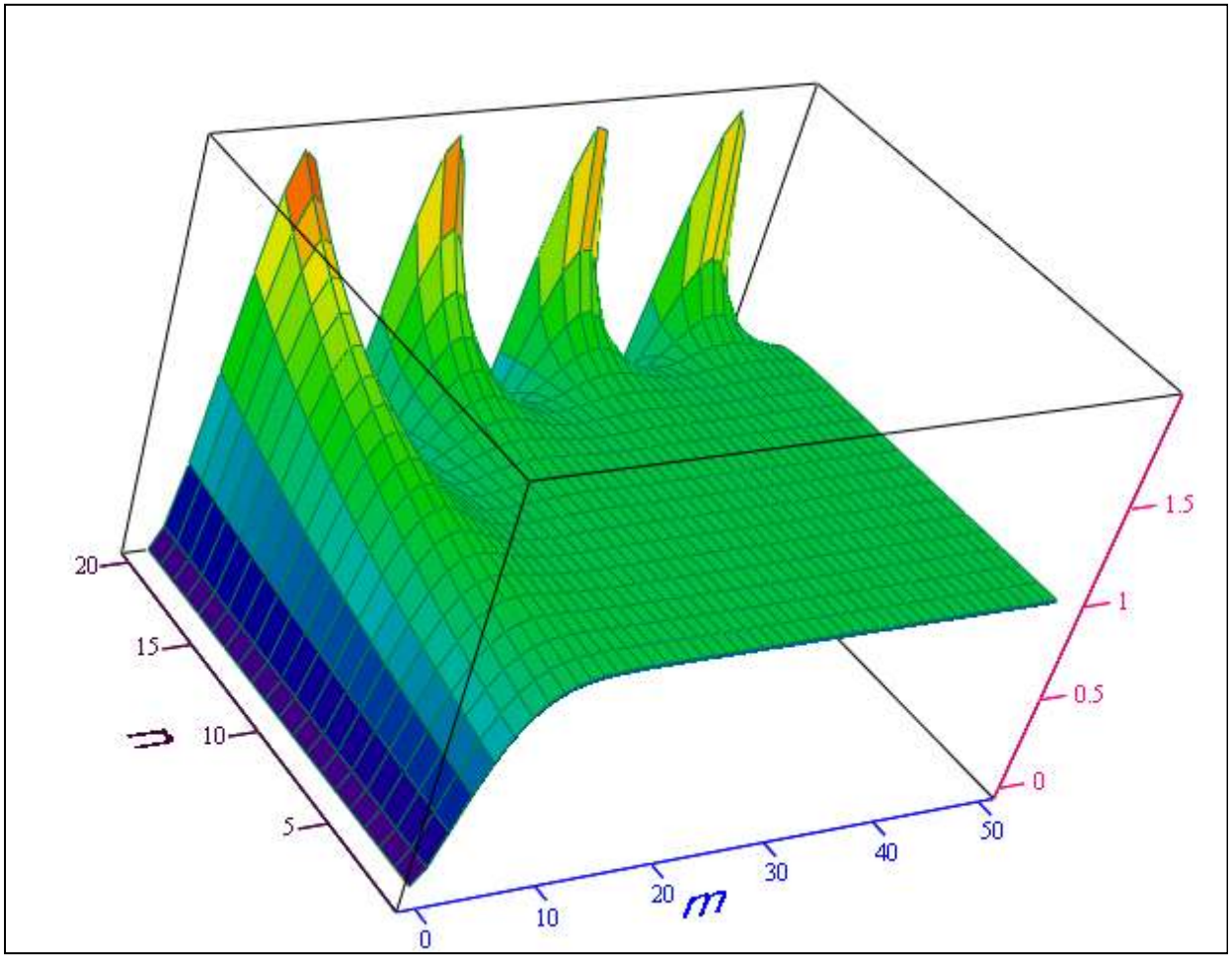
Tabela 1.4.6.

Charakterystyki czasowe obiektu oscylacyjnego – zestawienie

$\omega o := 1 \qquad m := 0 .. 50 \qquad n := 0 .. 20 \qquad t_m := 0 + 0.5\,m \qquad \beta_n := 1 - 0.05 \cdot n$

$$Y1(t,\beta) := -\frac{\cosh\left(t\cdot\sqrt{\beta^2\cdot\omega o^2-\omega o^2}\right)e^{-\beta\cdot t\cdot\omega o}\cdot\sqrt{\beta^2\cdot\omega o^2-\omega o^2}-\sqrt{\beta^2\cdot\omega o^2-\omega o^2}+\beta\cdot\omega o\cdot\sinh\left(t\cdot\sqrt{\beta^2\cdot\omega o^2-\omega o^2}\right)e^{-\beta\cdot t\cdot\omega o}}{\sqrt{\omega o^2\cdot\left(\beta^2-1\right)}} \qquad (1.4.9)$$

$M_{m,n} := Y1\left(t_m, \beta_n\right)$



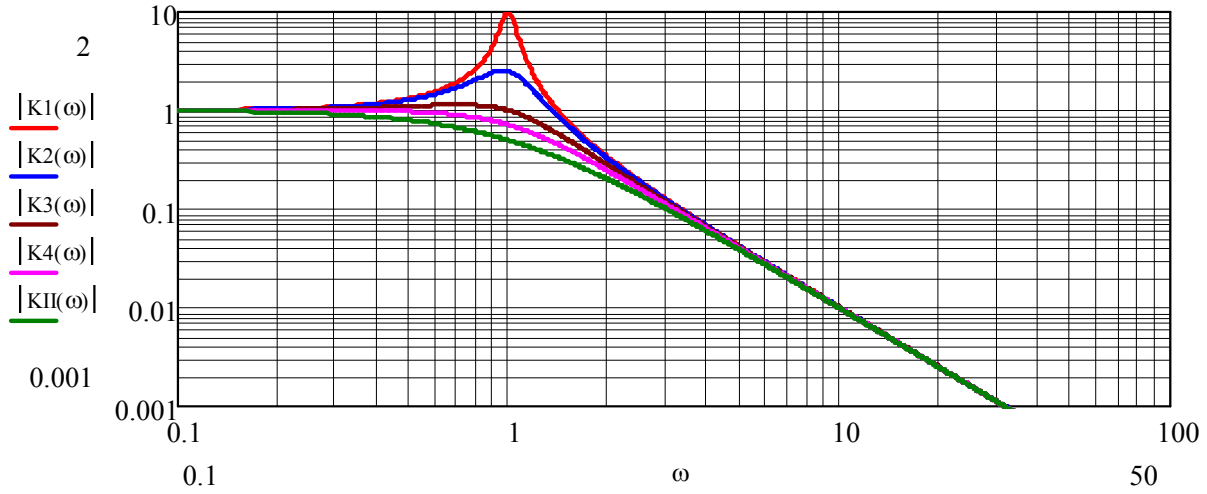
M

Rys. 1.4.5. Zestawienie charakterystyk czasowych obiektu oscylacyjnego. Wartości rzeczywiste przedziałów na osiach x, y określone na podstawie zmiennych pomocniczych wynoszą: tłumienie $n \in (0, 20) \rightarrow \beta \in (1, 0)$, czas $m \in (0, 50) \rightarrow t \in (0, 25)$, częstotliwość rezonansowa $\omega_o = 1$ (zob. tab. 1.4.6)

```
```

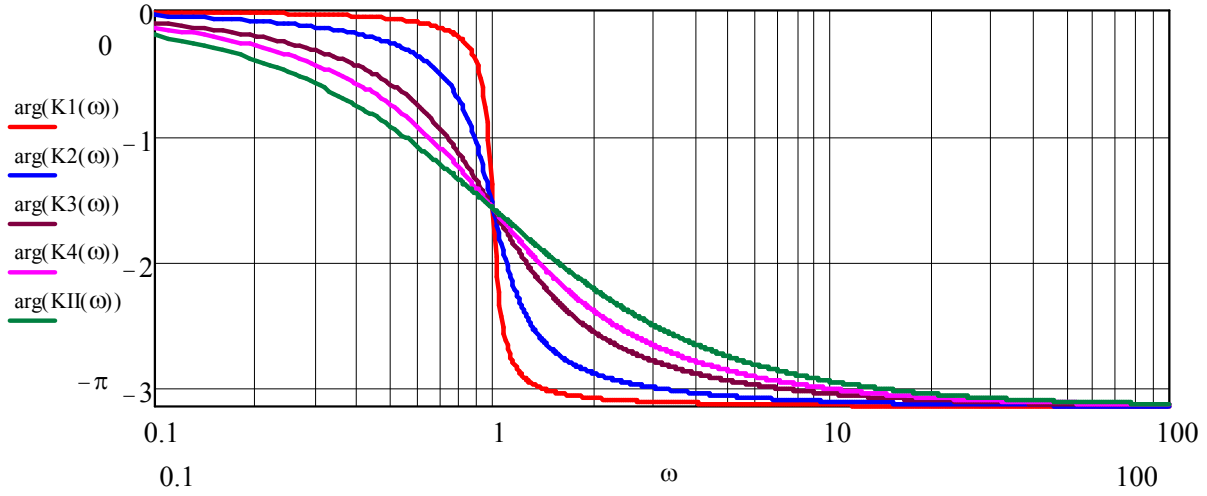
Tabela 1.4.7.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki częstotliwościowe obiektu oscylacyjnego $i := \sqrt{-1}$ $\omega := 0.01, 0.02 .. 100$ $\omega o := 1$ $\beta := 0.05$ $K1(\omega) := \dfrac{1}{\left[\left(\dfrac{i\cdot\omega}{\omega o}\right)^2 + 2\cdot\dfrac{\beta}{\omega o}\cdot i\cdot\omega + 1\right]}$ (1.4.10)	Zakresy zmiennych ω, ω_o, β Transmitancja K1(ω) Wzór 1.4.10 wykorzystany został do wielokrotnych obliczeń i wykonania wykresów dla częstotliwości rezonansowej $\omega_o = 1$ i wybranych wartości tłumienia β.



|KII(ω)| - Obiekt inercyjny drugiego rzedu, T1=T2=1

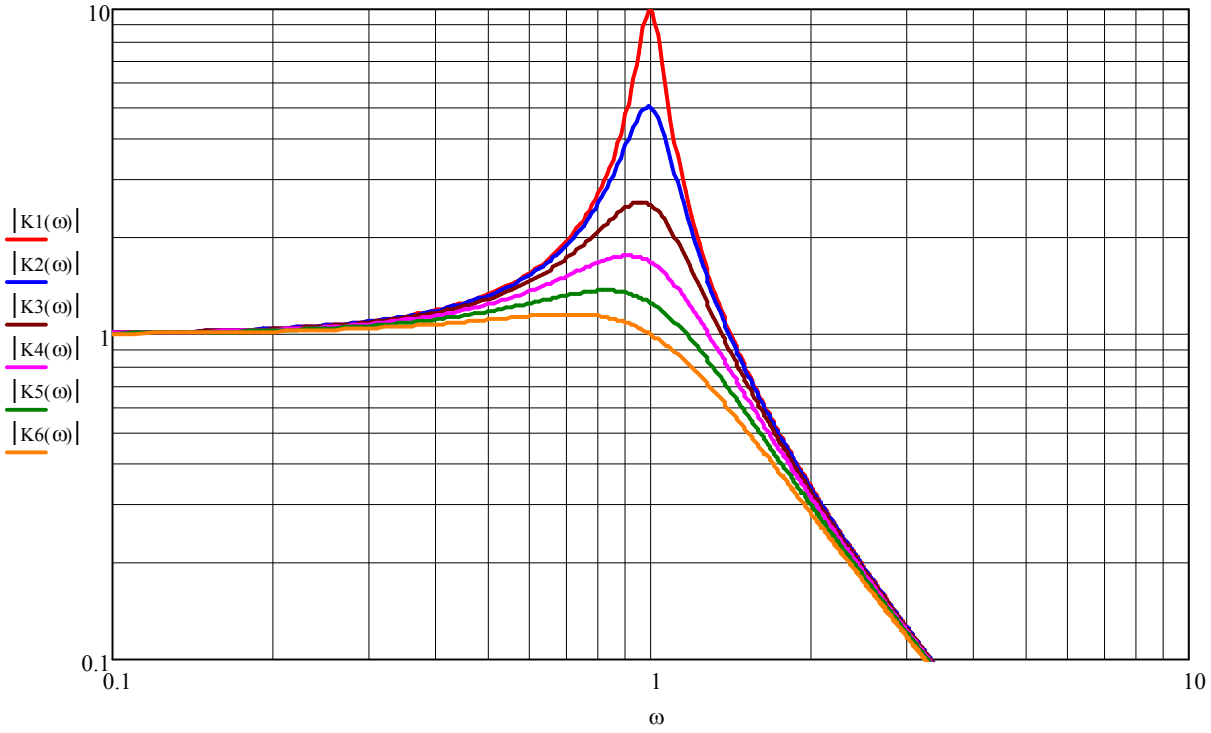
Obiekt oscylacyjny: ωo = 1, β: 0.05, 0.2, 0.5, 0.7



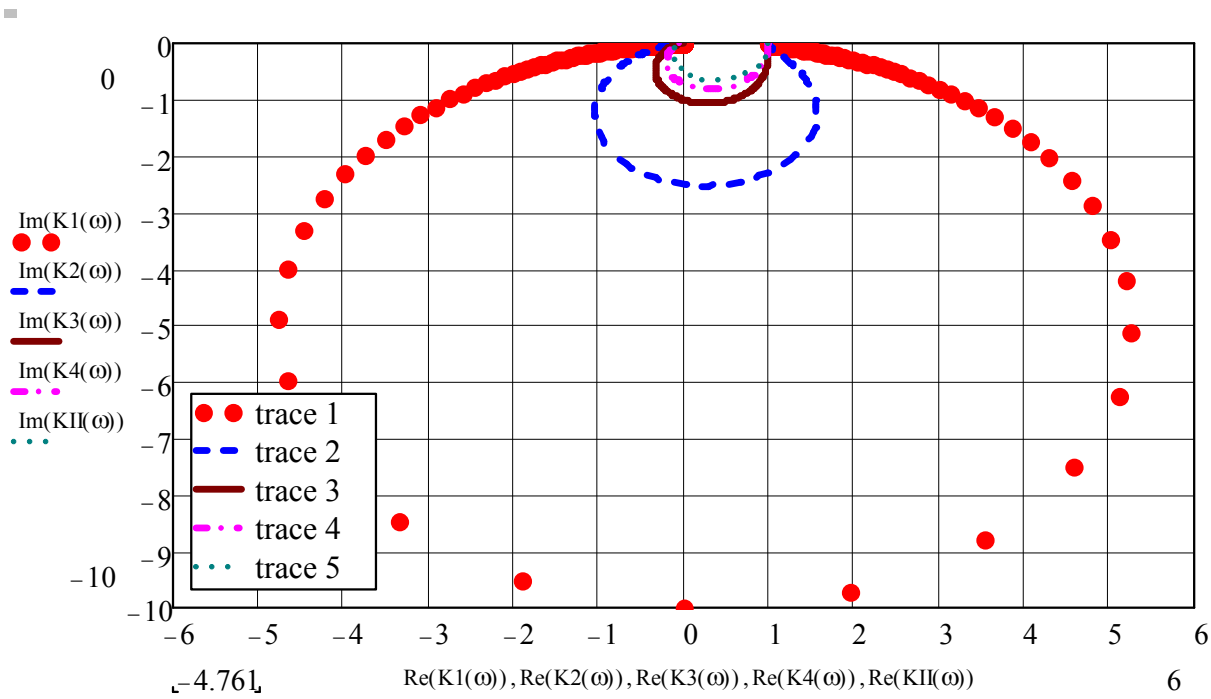
arg(KII(ω)) - Obiekt inercyjny drugiego rzedu, T1=T2=1

Obiekt oscylacyjny: ωo = 1, β: 0.05, 0.2, 0.5, 0.7

cd. tabeli 1.4.7.



Charakterystyki amplitudowe obiektu oscylacyjnego dla 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5

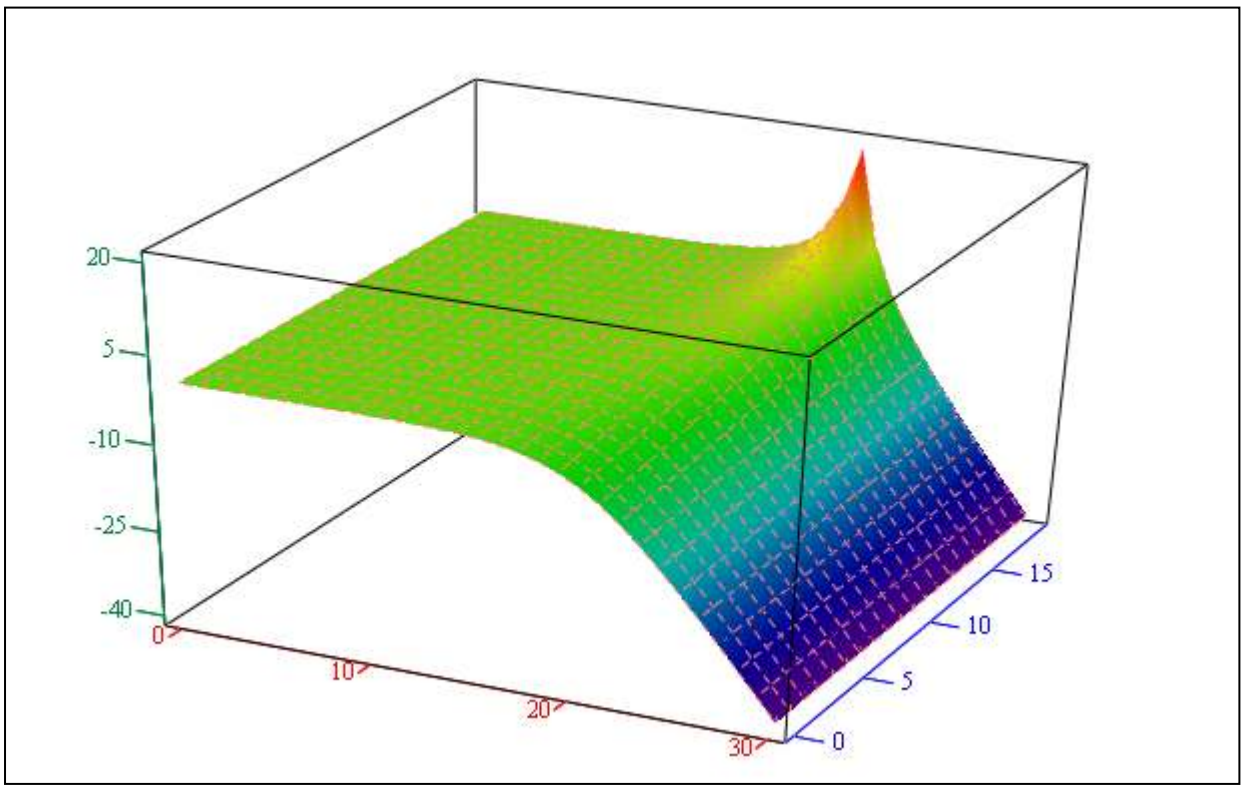


KII(ω) - Obiekt inercyjny drugiego rzedu, T1=T2=1

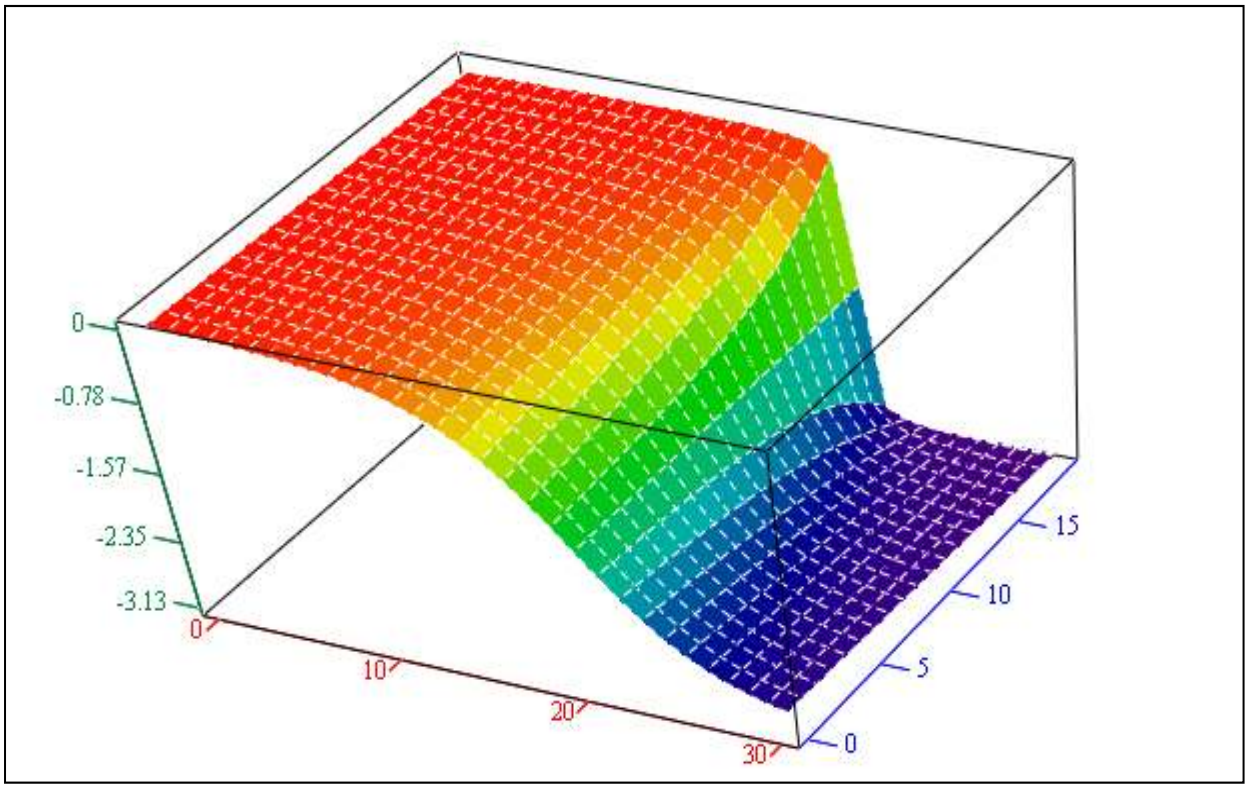
Obiekt oscylacyjny: ωo= 1, β:0.05, 0.2, 0.5, 0.7

Tabela 1.4.8.

okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki częstotliwościowe obiektu oscylacyjnego – zestawienie $i := \sqrt{-1}$ $\quad \omega o := 10$ $i := \sqrt{-1}$ $n := 0 .. 30$ $j := 0 .. 19$ $\beta_j := 1 - 0.05 \cdot j$ $\quad \omega_n := 10^{\frac{n-10}{10}}$ $K2(\omega, \beta) := 20 \log\left[\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega o^2}\right)^2 + 4 \cdot \beta^2 \cdot \frac{\omega^2}{\omega o^2}}}\right]$ (1.4.11) lub zapis równoważny dla modułu transmitancji $K2(\omega, \beta) := 20 \log\left[\left|\frac{1}{\left(\frac{i \cdot \omega}{\omega o}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{\omega o} \cdot i \cdot \omega + 1}\right|\right]$ (1.4.12) $M_{n,j} := K2(\omega_n, \beta_j)$ $K(\omega, \beta) := \arg\left[\frac{1}{\left(\frac{i \cdot \omega}{\omega o}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\beta}{\omega o} \cdot i \cdot \omega + 1}\right]$ $W_{n,j} := K(\omega_n, \beta_j)$	Częstotliwość rezonansowa obiektu oscylacyjnego. Zmienne pomocnicze: n, j *Dostosowanie obliczeń do potrzeb macierzowego generowania powierzchni w logarytmicznej skali częstotliwości wymaga wprowadzenia wektora funkcji wykładniczej ω_n oraz zmiennej pomocniczej n.* Rzeczywisty zakres zmiany tłumienia obiektu dla $j := 0 .. 19$ wynosi $\beta \in (1, 0.5)$. Rzeczywisty zakres zmiany częstotliwości dla $n := 0 .. 30$ wynosi $\omega \in (0.1, 100)$. Można wykazać, że moduł transmitancji (1.4.10) osiąga maksymalną wartość dla częstotliwości $\omega_1 = \omega o \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \beta^2}$ (zob. wykresy charakterystyk amplitudowych w tab. 1.4.7).



M



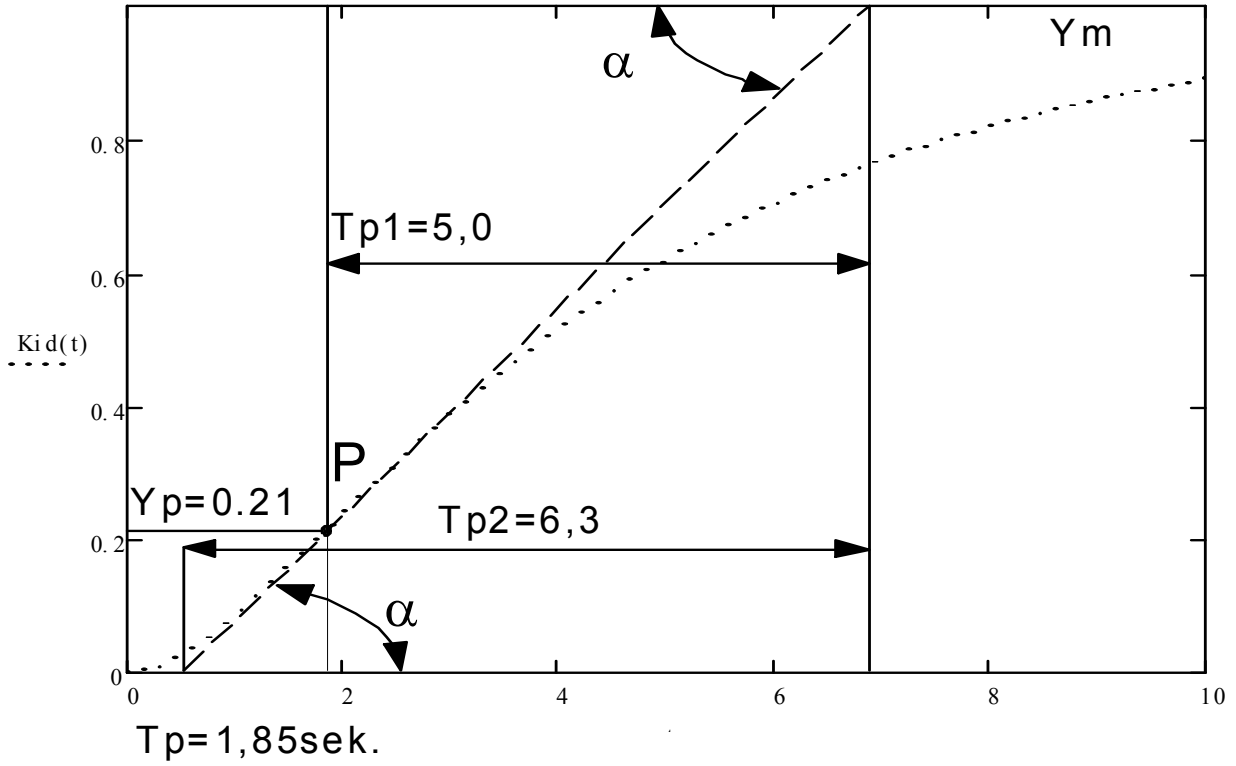
W

Rys. 1.4.6. Zestawienie charakterystyk modułu i argumentu obiektu oscylacyjnego dla przykładu z tabeli 1.4.8

```
```

1.4.1. Doświadczalne wyznaczenie stałych czasowych obiektu inercyjnego drugiego rzędu

Wartości stałych czasowych obiektu inercyjnego drugiego rzędu można wyznaczyć, badając właściwości charakterystyki czasowej tego obiektu (zob. rys. 1.4.1).



Rys. 1.4.1.1. Charakterystyka czasowa obiektu drugiego rzędu i pomocnicze parametry potrzebne do wyznaczenia stałych czasowych tego obiektu

Nie jest znana metoda pozwalająca na bezpośrednie (z wykresu) wyznaczenie wartości stałych czasowych obiektu drugiego rzędu (dla obiektu pierwszego rzędu istnieje taka możliwość – zob. rys. 1.3.1).

Należy przeprowadzić dodatkowe obliczenia. Z analizy matematycznej funkcji sygnału wyjściowego wiadomo, że sygnał wyjściowy określa funkcja (1.4.13), która posiada punkt przegięcia P. Wartość zmiennej niezależnej (czas Tp) punktu P wyznacza się, przyrównując do zera drugą pochodną tej funkcji.

Jeżeli sygnał wyjściowy określa funkcja: $$Kid(t) = Ym\left(1 - \frac{T1 \cdot e^{\frac{-t}{T1}}}{T1 - T2} + \frac{T2 \cdot e^{\frac{-t}{T2}}}{T1 - T2}\right) \qquad (1.4.13)$$

to pierwszą pochodną sygnału wyjściowego określa wzór: $$p1(t) = Ym \cdot \frac{e^{\frac{-t}{T1}} - e^{\frac{-t}{T2}}}{T1 - T2} \qquad (1.4.14)$$

```
```

Drugą pochodną sygnału wyjściowego określa wzór:

$$p2(t) = \frac{Ym}{T1 - T2} \cdot \left(\frac{1}{T2} \cdot e^{\frac{-t}{T2}} - \frac{1}{T1} \cdot e^{\frac{-t}{T1}}\right) . \quad (1.4.15)$$

Wartość czasu, dla którego druga pochodna jest równa zero, określa wzór:

$$Tp(T1, T2) = \frac{T1 \cdot T2}{T2 - T1} \cdot \ln \frac{T2}{T1} . \quad (1.4.16)$$

Na podstawie rysunku 1.4.1.1 otrzymujemy: $\frac{Ym}{Tp2} = tg\alpha = p1(Tp)$ (1.4.17)

Dla podstawienia $k = \frac{T2}{T1}$ we wzorze 1.4.16 (1.4.18)

wartość pierwszej pochodnej w punkcie Tp określa wzór:

$$p1(Tp) = Ym \cdot \frac{e^{\frac{-k \cdot \ln k}{k-1}} - e^{\frac{-\ln k}{k-1}}}{T1 \cdot (1 - k)} . \quad (1.4.19)$$

Wartość sygnału wyjściowego w punkcie P określa wzór:

$$Kid(Tp) = Yp = Ym \cdot \left(1 + \frac{k \cdot e^{\frac{-\ln k}{k-1}} - e^{\frac{-k \cdot \ln k}{k-1}}}{1 - k}\right) . \quad (1.4.20)$$

Wartość niewiadomej k w równaniu (1.4.20) wyznaczamy, korzystając z funkcji root(f(z),z) programu Mathcad. Działanie tej funkcji polega na takim zmienianiu zmiennej z, aż wartość wyrażenia będzie równa zero i ta wartość jest podawana jako wynik. Przykład obliczenia niewiadomej k przedstawiony jest w tab. 1.4.9.

Na podstawie rysunku 1.4.1.1 otrzymujemy także:

$$\frac{Ym - Yp}{Tp1} = tg\alpha = p1(Tp) . \quad (1.4.21)$$

Po wykonaniu podstawień za $Yp \rightarrow$ (3.4.20) oraz $p1(Tp) \rightarrow$(1.4.19)

Otrzymujemy:

$$Tp1 = T1 \cdot \frac{k \cdot e^{\frac{-\ln k}{k-1}} - e^{\frac{-k \cdot \ln k}{k-1}}}{e^{\frac{-\ln k}{k-1}} - e^{\frac{-k \cdot \ln k}{k-1}}} = T1 \cdot (1 + k) \quad (1.4.22)$$

Równoważność zapisów we wzorze (1.4.22) wykażemy, podstawiając do tego wzoru:

$$a = e^{\frac{-\ln k}{k-1}} \qquad b = e^{\frac{-k \cdot \ln k}{k-1}} . \quad (1.4.23)$$

Po wykonaniu działań otrzymujemy:

$$Tp1 = T1 \cdot \left(1 + \frac{a \cdot (k-1)}{a - b}\right) . \quad (1.4.24)$$

Następnie obliczamy iloraz: $\frac{b}{a} = e^{-\ln k}$. (1.4.25)

Logarytmując stronami równanie (1.4.25), otrzymujemy: $\ln \frac{b}{a} = -\ln k$. (1.4.26)

Ostatecznie: $a = k \cdot b.$ (1.4.27)

Podstawiając (1.4.27) do wzoru (1.4.24), otrzymujemy: $Tp1 = T1 \cdot (1 + k)$.

Ze wzoru (1.4.22) dla k = 4.158 (zob. tab. 1.4.9) oraz czasu Tp1 = 5.0 (zob. rys. 1.4.1.1) wyznaczamy wartość stałej czasowej T1:

$$T1 = \frac{Tp1}{1+k} = \frac{5.0}{1+4.158} \approx 0{,}97 .$$

Ze wzoru (1.4.18) wyznaczamy wartość stałej czasowej T2:

$$T2 = k \cdot T1 = 4.158 \cdot 0.97 \approx 4.03.$$

Podsumowanie

Po wyznaczeniu wartości stałych czasowych obiektu należy zweryfikować poprawność wykonanej identyfikacji np. przez wyznaczenie różnicy sygnałów wyjściowych. Jeżeli różnica jest zbyt duża, trzeba wykonać korektę położenia punktu przegięcia P i ponownie wyznaczyć stałe czasowe. Duże wartości różnicy sygnałów obiektu i jego modelu zawsze wskazują na potrzebę korekty wartości parametrów lub typu modelu.

Tabela 1.4.9.

okno robocze programu Mathcad) *– w polu tekstowym wpisz temat obliczeń:*	*Komentarz:*
Wielokrotne rozwiązywanie równania z jedną niewiadomą $p := 5 .. 26 \qquad Y_p := 0.01 \cdot p \qquad Ym := 1$ $k := 2$ $a_p := \text{root}\left[\frac{(Y_p - Ym)}{Ym} - \frac{k \cdot e^{\frac{-\ln(k)}{k-1}} - e^{\frac{-k \cdot \ln(k)}{k-1}}}{1-k}, k \right]$ (1.4.28)	Zmienna k, wzór (1.4.23), występuje w niejawnej postaci. p – zmienna pomocnicza Yp – wartość sygnału wyjściowego w punkcie przegięcia Ym – wartość maksymalna sygnału wyjściowego k : = 2 przypuszczalna wartość a_p – wektor wyników (*wpisz:* a[p) *Dla wyrażeń z kilkoma pierwiastkami wartość przypuszczalna określa, który pierwiastek zostanie obliczony.* dla Yp = 0.2 $a_p = 4.158$

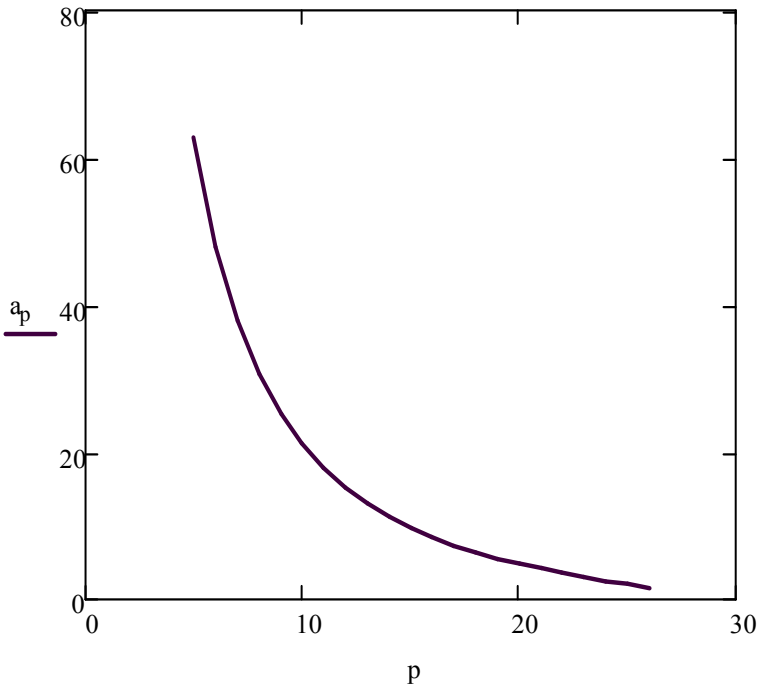
Wynik

$a_p =$

17.849
15.219
13.064
11.272
9.762
8.476
7.37
6.409
5.567
4.823
4.158
3.559
3.011
2.498
2
...

Pierwiastki rzeczywiste równania (1.4.28) dla $p \in (5, 26)$

Wykres pierwiastków równania 1.4.28



1.5. Charakterystyki obiektu całkującego

Transmitancję operatorową obiektu całkującego określa wzór: $Kc(s) = \frac{1}{s \cdot Tc}$. (1.5.1)

Dla s = iω otrzymujemy transmitancję widmową obiektu całkującego

$$Kc(\omega) = \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} . \quad (1.5.2)$$

Charakterystykę czasową obiektu całkującego określa wzór: $Kc(t) = \frac{t}{Tc}$. (1.5.3)

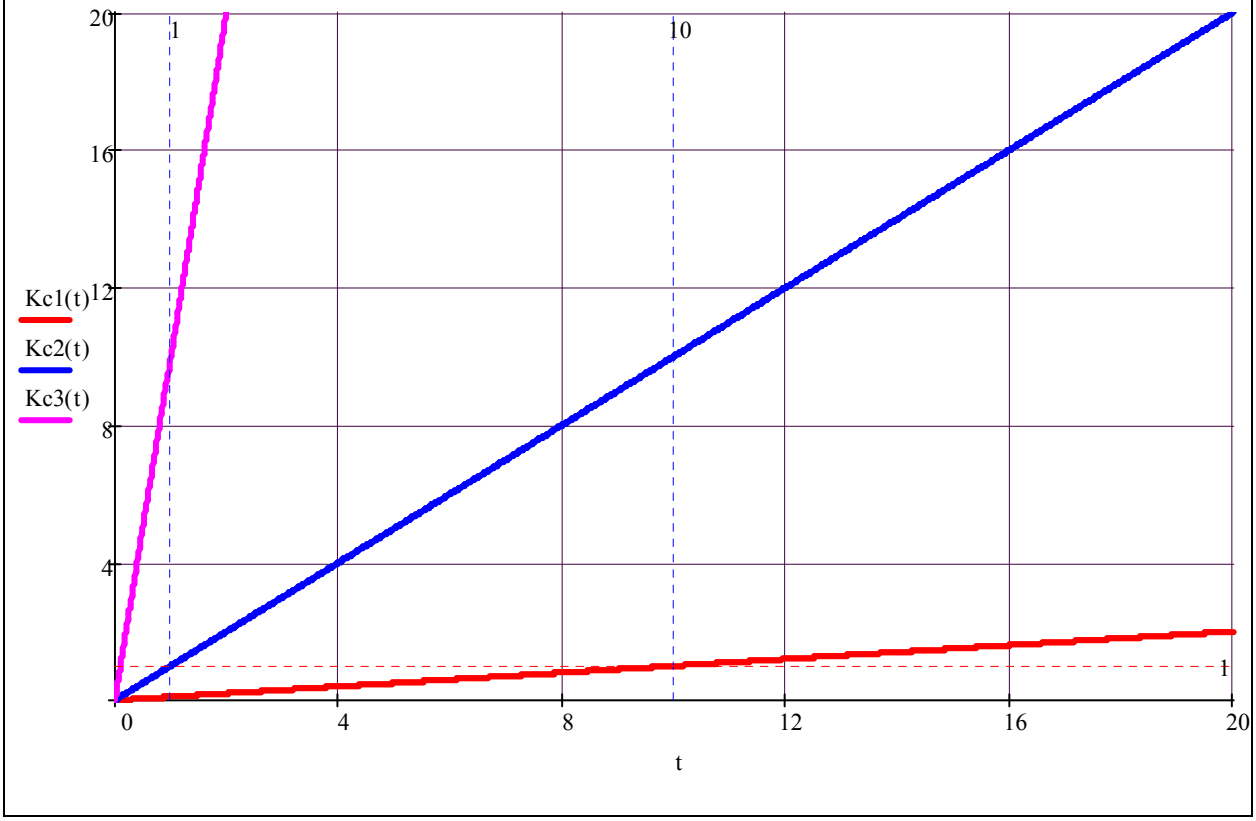
W zastosowaniach technicznych obiekt całkujący modelowany jest jako szeregowe połączenie obiektu całkującego z obiektem inercyjnym pierwszego lub drugiego rzędu albo jako szeregowe połączenie obiektu całkującego z dwoma obiektami inercyjnymi pierwszego rzędu.

Tabela 1.5.1.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Obiekt całkujący: transformaty sygnału wyjściowego	Transformata sygnału wyjściowego.
$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s \cdot Tc}$	Charakterystyka czasowa – odwrotna transformata Laplace'a. *– zaznacz zmienną:* **s** *– z menu* Symbolics *wybierz:* Transform *– następnie wybierz:* Inverse Laplace
$\frac{t}{Tc}$	Procesor symboliczny wpisze $\frac{t}{Tc}$ pod wzorem transformaty sygnału wyjściowego.
$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s \cdot Tc \cdot (1 + s \cdot T1)}$	Transformata sygnału wyjściowego szeregowego połączenia obiektu inercyjnego pierwszego rzędu i obiektu całkującego.
$\frac{t - T1 + T1 \cdot e^{-\frac{t}{T1}}}{Tc}$	Charakterystyka czasowa szeregowego połączenia obiektu inercyjnego pierwszego rzędu i obiektu całkującego.
$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s \cdot Tc \cdot (1 + s \cdot T1) \cdot (1 + s \cdot T2)}$	Transformata sygnału wyjściowego szeregowego połączenia dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu i obiektu całkującego.
$-\frac{T1^2 - T2^2 - T1^2 \cdot e^{-\frac{t}{T1}} + T2^2 \cdot e^{-\frac{t}{T2}} - T1 \cdot t + T2 \cdot t}{T1 \cdot Tc - T2 \cdot Tc}$	Charakterystyka czasowa szeregowego połączenia dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu i obiektu całkującego. Tc – stała czasowa obiektu całkującego. T1, T2 – stałe czasowe obiektów inercyjnych.

Tabela 1.5.2.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Obiekt całkujący: charakterystyki czasowe $t := 0, 0.01 .. 10 \quad Tc1 := 10 \quad Tc2 := 1$ $Tc3 := 0.1$ $Kc1(t) := \frac{t}{Tc1}$ $Kc2(t) := \frac{t}{Tc2}$ $Kc3(t) := \frac{t}{Tc3}$	Dla x(t) = 1(t), y(t) = 1(t)· Kc(t) = Kc(t) Stałą czasową obiektu całkującego można wyznaczyć bezpośrednio z charakterystyki czasowej. Jeżeli dla x(t) = 1(t), y(t) = 1 to t = Tc

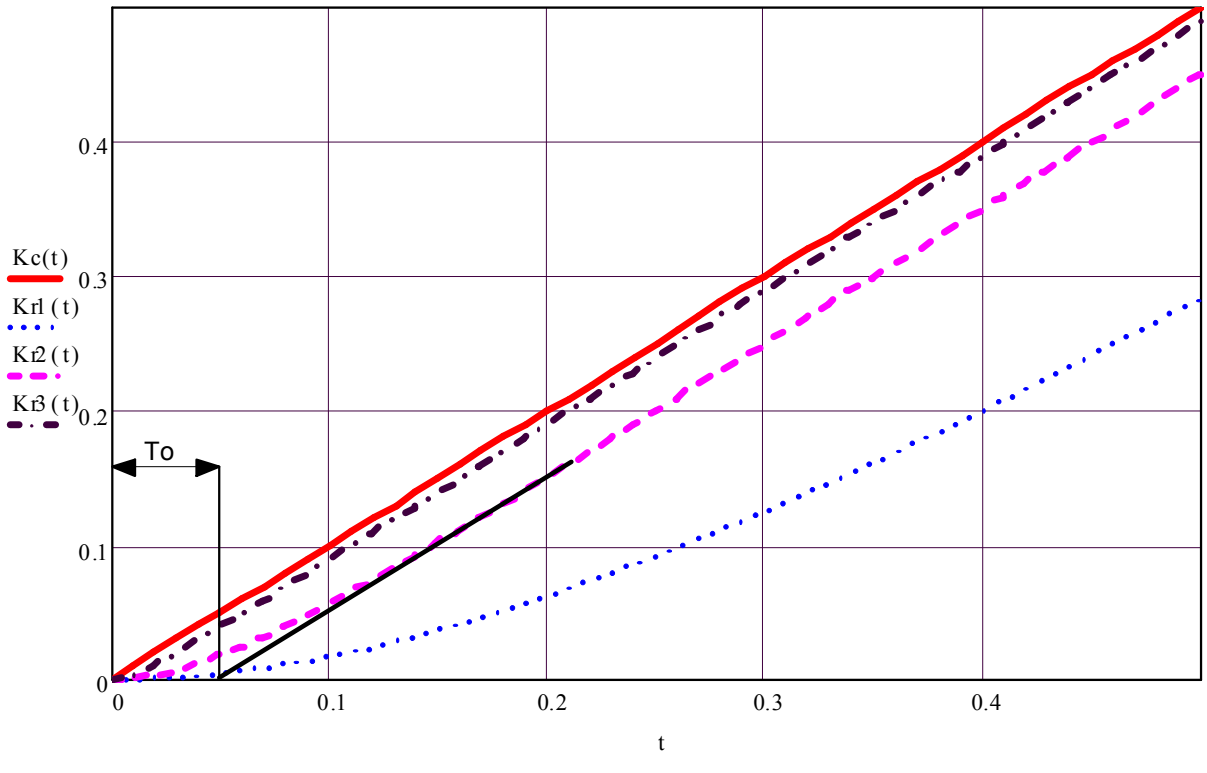


Rys. 1.5.1. Charakterystyki czasowe obiektu całkującego dla: Tc1 = 10, Tc2 = 1, Tc3 = 0.1

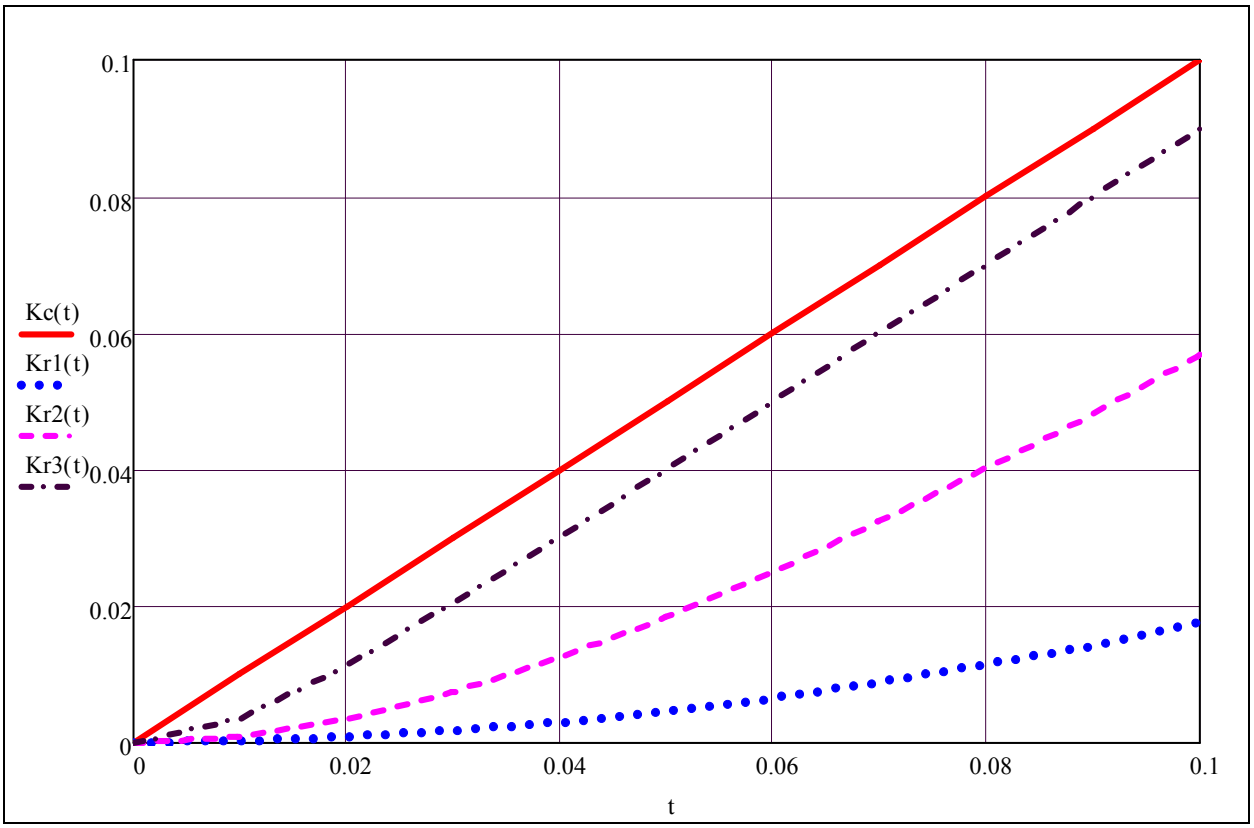
Wynik porównania charakterystyk czasowych obiektu całkującego idealnego (zob. rys. 1.5.1) i obiektu rzeczywistego określa błąd całkowania, który związany jest z powstaniem dodatkowego opóźnienia To (zob. rys. 1.5.2), którego wartość jest równa wartości stałej czasowej obiektu inercyjnego pierwszego rzędu (zob. tab. 1.5.3). Dla małych wartości stałej czasowej obiektu inercyjnego T1 << Tc – wykres Kr3(t) – i dużych wartości czasów całkowania t >> To błąd względny całkowania określony jako $\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{Yid - Yr}{Yid}$ (gdzie: Yid – sygnał wyjściowy obiektu całkującego idealnego, Yr – sygnał wyjściowy obiektu całkującego rzeczywistego) nie jest duży.

Tabela 1.5.3.

(okno robocze programu Mathcad) *– w polu tekstowym wpisz temat:*	*Komentarz:*
Charakterystyki czasowe szeregowego połączenia obiektu całkującego z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu	Obiekty całkujące rzeczywiste.
$Tc := 1$ $T1a := 0.25 \quad T1b := 0.05 \quad T1c := 0.01$	Stała czasowa obiektu całkującego. Stałe czasowe obiektów inercyjnych pierwszego rzędu.
$Kc(t) := \frac{t}{Tc}$	Obiekt całkujący idealny.
$Kr1(t) := \frac{t - T1a + T1a \cdot e^{-\frac{t}{T1a}}}{Tc}$ $Kr2(t) := \frac{t - T1b + T1b \cdot e^{-\frac{t}{T1b}}}{Tc}$ $Kr3(t) := \frac{t - T1c + T1c \cdot e^{-\frac{t}{T1c}}}{Tc}$	*– wywołaj wykresy x–y i określ ich parametry jak w przykładzie obliczeń z tabeli 1.3.2*
	Charakterystyki czasowe przedstawione są na rysunku 1.5.2.



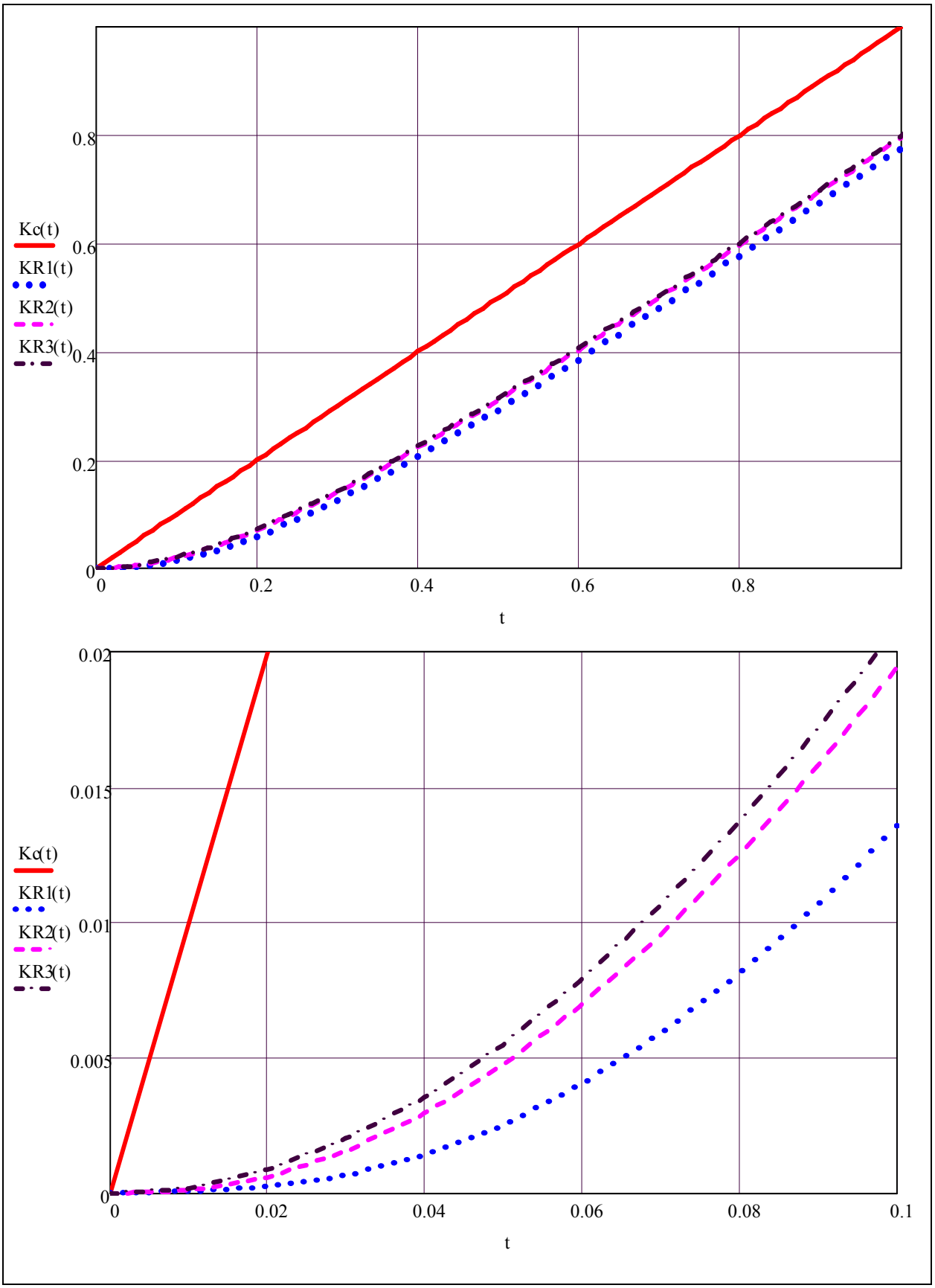
Rys. 1.5.2a. Charakterystyki czasowe szeregowego połączenia obiektu całkującego z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu dla: Tc = 1, T1a = 0.25, T1b = 0.05, T1c = 0.01



Rys. 1.5.2b. Charakterystyki czasowe szeregowego połączenia obiektu całkującego z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu dla: Tc = 1, T1a = 0.25, T1b = 0.05, T1c = 0.01

Tabela 1.5.4.

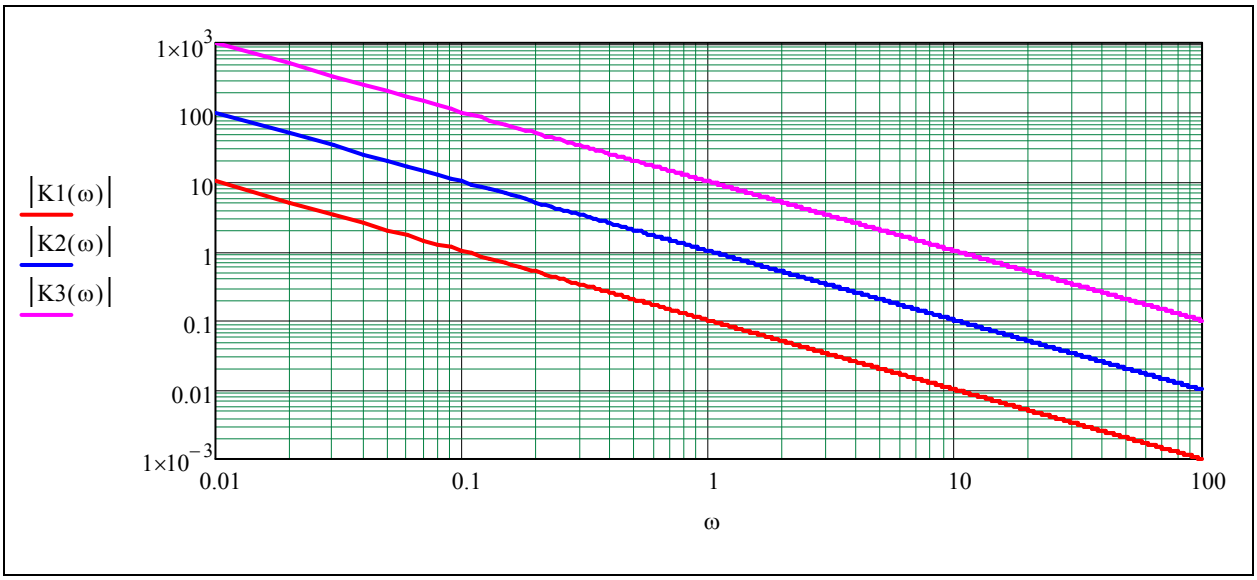
(okno robocze programu Mathcad) *– w polu tekstowym wpisz temat:*	*Komentarz:*
Charakterystyki czasowe szeregowego połączenia dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu z obiektem całkującym	Stała czasowa obiektu całkującego (Tc).
$Tc := 1$ $T1 := 0.2 \quad T2a := 0.025 \quad T2b := 0.005 \quad T2c := 0.001$	Stałe czasowe obiektów inercyjnych pierwszego rzędu.
$Kc(t) := \frac{t}{Tc}$	Obiekt całkujący idealny.
$KR1(t) := -\frac{T1^2 - T2a^2 - T1^2 \cdot e^{-\frac{t}{T1}} + T2a^2 \cdot e^{-\frac{t}{T2a}} - T1 \cdot t + T2a \cdot t}{T1 \cdot Tc - Tc \cdot T2a}$	Obiekty całkujące rzeczywiste.
$KR2(t) := -\frac{T1^2 - T2b^2 - T1^2 \cdot e^{-\frac{t}{T1}} + T2b^2 \cdot e^{-\frac{t}{T2a}} - T1 \cdot t + T2b \cdot t}{T1 \cdot Tc - Tc \cdot T2b}$	*– wywołaj wykresy x–y i określ ich parametry jak w przykładzie obliczeń z tabeli 1.3.2.*
$KR3(t) := -\frac{T1^2 - T2c^2 - T1^2 \cdot e^{-\frac{t}{T1}} + T2c^2 \cdot e^{-\frac{t}{T2a}} - T1 \cdot t + T2c \cdot t}{T1 \cdot Tc - Tc \cdot T2c}$	*Charakterystyki czasowe przedstawione są na rysunku 1.5.3.*



Rys. 1.5.3. Charakterystyki czasowe szeregowego połączenia dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu z obiektem całkującym dla: Tc =1, T1 = 0.2, T2a = 0.025, T2b = 0.005, T2c = 0.001

Tabela 1.5.5.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki amplitudowe obiektu całkującego $i := \sqrt{-1} \qquad \omega := 0.01, 0.02 .. 100$ $Tc1 := 10 \qquad Tc2 := 1 \qquad Tc3 := 0.1$ $K1(\omega) := \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc1}$ $K2(\omega) := \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc2}$ $K3(\omega) := \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc3}$	Transmitancje widmowe idealnych obiektów całkujących. Stałe czasowe obiektów całkujących. *Wyznaczanie wartości stałej czasowej obiektu całkującego.* *Z charakterystyki amplitudowej obiektu całkującego odczytujemy wartość częstotliwości, dla której moduł transmitancji jest równy 1, następnie z warunku* $\omega \cdot Tc = 1$ *wyznaczamy wartość stałej czasowej Tc.*



Rys. 1.5.4. Charakterystyki amplitudowe obiektu całkującego dla: Tc1 = 10, Tc2 = 1, Tc3 = 0.1

Podsumowanie

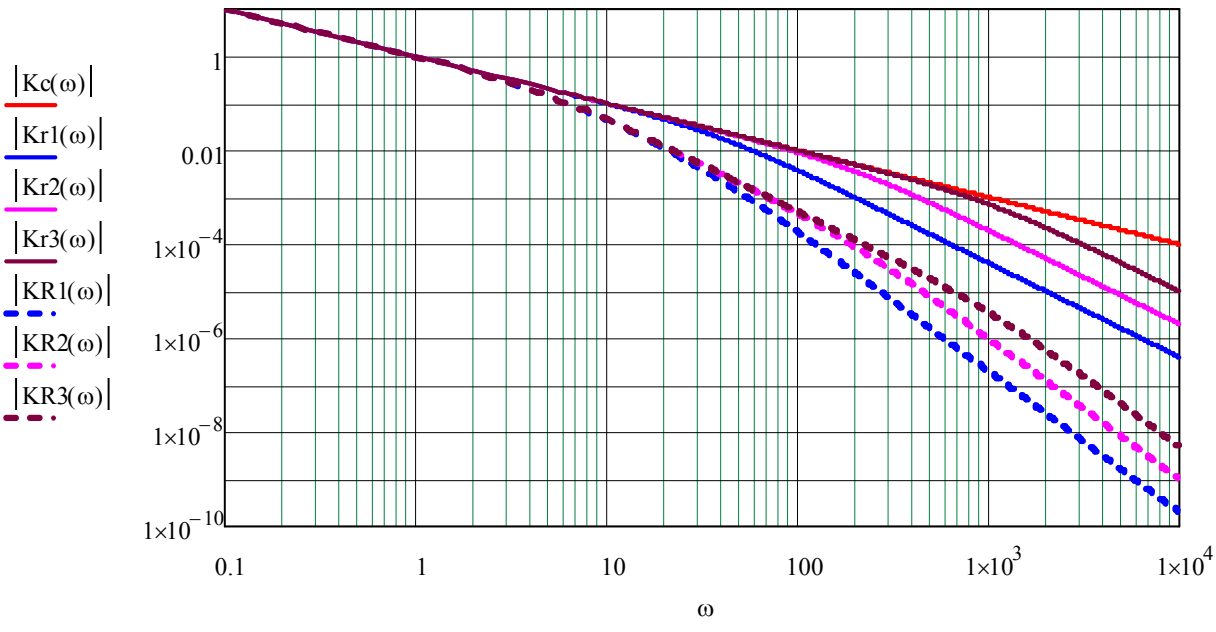
Wynik porównania charakterystyk czasowych rzeczywistych obiektów całkujących wskazuje, że podstawowe właściwości rzeczywistego obiektu całkującego modelowanego w postaci szeregowego połączenia z obiektami inercyjnymi pierwszego rzędu określa największa wartość stałej czasowej obiektu inercyjnego. W praktyce technicznej wartość kolejnej stałej czasowej szeregowo połączonych obiektów inercyjnych jest kilka razy mniejsza od wartości poprzedniej stałej czasowej, tzn. Tc >> T1 > T2.

Argument transmitancji obiektu całkującego (idealnego) wynosi $-\pi/2$ i nie zależy od częstotliwości sinusoidalnie zmiennego sygnału wejściowego, tzn., że Re(Kc(ω)) = 0 i wszystkie sinusoidalnie zmienne sygnały wyjściowe obiektu całkującego są cofnięte o kąt 90° względem początkowego kąta (fazy) sygnału wejściowego.

```
```

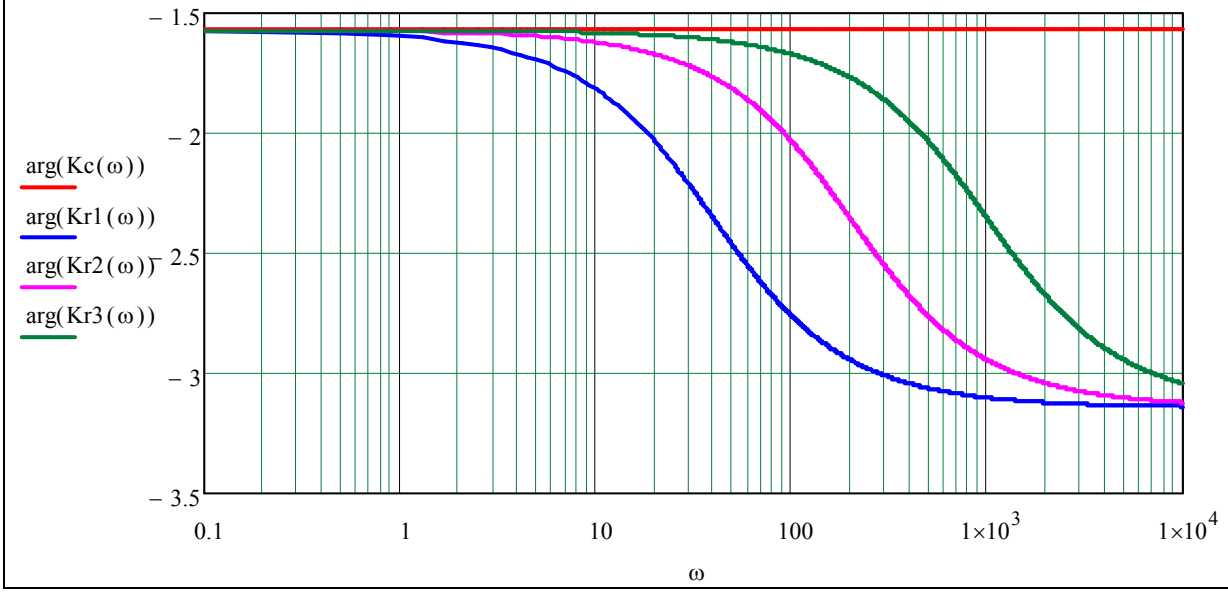
Tabela 1.5.6.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki amplitudowe rzeczywistego obiektu całkującego $i := \sqrt{-1}$ $\omega := 0.1 , 1 .. 10000$ $Tc := 1$ $T1a := 0.025$ $T1b := 0.005$ $T1c := 0.001$ $Kc(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc}$ $Kr1(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T1a)}$ $Kr2(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T1b)}$ $Kr3(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T1c)}$ $Tc := 1$ $T1 := 0.2$ $T2a := 0.025$ $T2b := 0.005$ $T2c := 0.001$ $KR1(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T2a)}$ $KR2(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T2b)}$ $KR3(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T2c)}$	Krok obliczeń (liczbę punktów obliczeniowych) w przedziałach zmiennych należy dostosować do technicznych możliwości komputera wykonującego obliczenia (wielkość pamięci wirtualnej) oraz możliwości procesora programu Mathcad. Duża liczba punktów obliczeniowych wydłuża czas wykonywania obliczeń, może być przyczyną przerwania pracy programu. *- wywołaj wykresy x–y i określ ich parametry jak w przykładzie obliczeń z tabeli 1.3.2.* *Charakterystyki przedstawione są na rysunku 1.5.5.*



Rys. 1.5.5. Charakterystyki amplitudowe obiektów całkujących – idealnego i rzeczywistych

Tabela 1.5.7.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki fazowe rzeczywistych obiektów całkujących $\omega := 0.1, 0.5 .. 10000 \qquad Tc := 1$ $T1a := 0.025 \quad T1b := 0.005 \quad T1c := 0.001$ $Kr2(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T1b)}$ $Kr1(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T1a)}$ $Kr3(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T1c)}$	Obiekt całkujący połączony szeregowo z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu. Stałe czasowe obiektu inercyjnego pierwszego rzędu. *– wywołaj wykresy x–y i określ ich parametry jak w przykładzie obliczeń z tabeli 1.3.2*
	

Rys. 1.5.6. Charakterystyki fazowe obiektów całkujących – idealnego i rzeczywistych

Należy pamiętać, że wartości $\varphi = \arg(z)$ obliczane przez program Mathcad dla wykładniczych postaci liczby zespolonej $z = r \cdot e^{i\cdot\varphi}$ zawierają się między $-\pi$ a π.

Obliczenia arg(z) dla funkcji, gdzie wartość φ jest większa od π, wykonujemy jako obliczenia sumy argumentów, np. dla szeregowego połączenia obiektu całkującego z obiektami inercyjnymi transmitancje i argumenty określają wzory:

$$Kc1(\omega) := Kc(\omega)\cdot K1(\omega) \quad , \qquad (1.5.4)$$

$$Kc2(\omega) := Kc(\omega)\cdot K2(\omega) \qquad (1.5.5)$$

gdzie:

$$Kc(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc} \qquad (1.5.6)$$

$$K1(\omega) := \frac{1}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1)} \qquad (1.5.7)$$

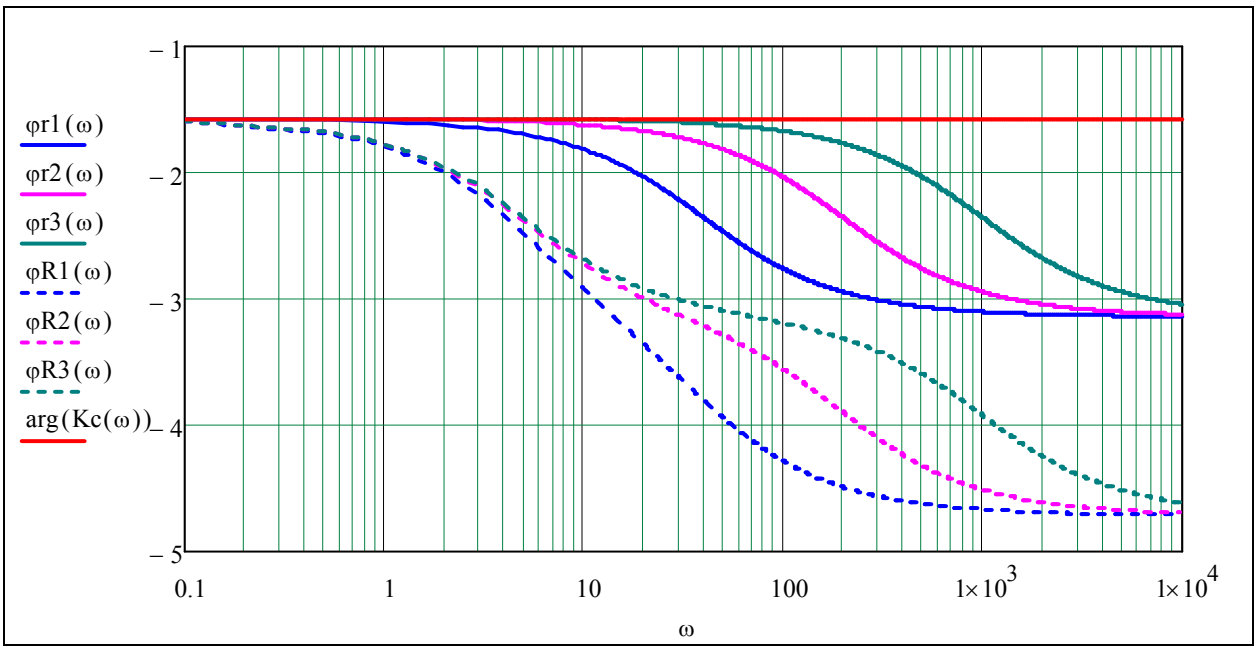
$$K2(\omega) := \frac{1}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T2)} \qquad (1.5.8)$$

$$\varphi1(\omega) := \arg(Kc(\omega)) + \arg(K1(\omega)) \qquad (1.5.9)$$

$$\varphi2(\omega) := \arg(Kc(\omega)) + \arg(K2(\omega)) \qquad (1.5.10)$$

Tabela 1.5.8.

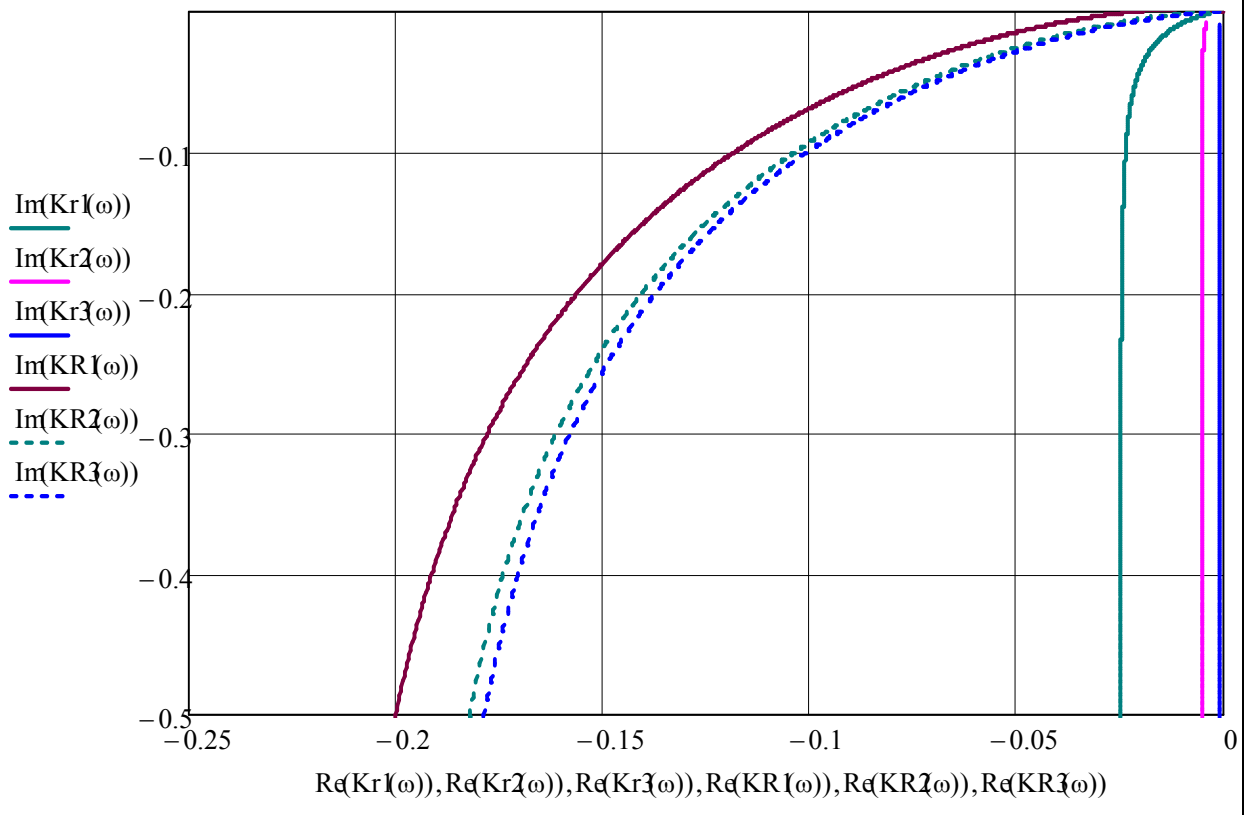
(okno robocze programu Mathcad) *– w polu tekstowym wpisz temat:*	*Komentarz:*
Charakterystyki fazowe rzeczywistych obiektów całkujących $i := \sqrt{-1}$ $\omega := 0.1 , 0.5 .. 10000$ $Tc := 1$ $T1a := 0.025$ $T1b := 0.005$ $T1c := 0.001$ $Kc(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc}$ $K1a(\omega) := \frac{1}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1a)}$ $K1b(\omega) := \frac{1}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1b)}$ $K1c(\omega) := \frac{1}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1c)}$ $\varphi r1(\omega) := \arg(Kc(\omega)) + \arg(K1a(\omega))$ $\varphi r2(\omega) := \arg(Kc(\omega)) + \arg(K1b(\omega))$ $\varphi r3(\omega) := \arg(Kc(\omega)) + \arg(K1c(\omega))$ $T1 := 0.2$ $T2a := 0.025$ $T2b := 0.005$ $T2c := 0.001$ $KR1(\omega) := \frac{1}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T2a)}$ $KR2(\omega) := \frac{1}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T2b)}$ $KR3(\omega) := \frac{1}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T2c)}$ $\varphi R1(\omega) := \arg(Kc(\omega)) + \arg(KR1(\omega))$ $\varphi R2(\omega) := \arg(Kc(\omega)) + \arg(KR2(\omega))$ $\varphi R3(\omega) := \arg(Kc(\omega)) + \arg(KR3(\omega))$	Szeregowe połączenie obiektów inercyjnych pierwszego rzędu z obiektem całkującym. *– wywołaj wykresy x–y i określ ich parametry jak w przykładzie obliczeń z tabeli 1.3.2*



Rys. 1.5.7. Charakterystyki fazowe obiektów całkujących – idealnego i rzeczywistych

Tabela 1.5.9.

(okno robocze programu Mathcad) *– w polu tekstowym wpisz temat:*	*Komentarz:*
Charakterystyki częstotliwościowe rzeczywistych obiektów całkujących $i := \sqrt{-1}$ $\omega := 0.01, 0.02 .. 100$ $Tc := 1$ $T1a := 0.025$ $T1b := 0.005$ $T1c := 0.001$ $Kr1(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T1a)}$ $Kr2(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T1b)}$ $Kr3(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T1c)}$ $T1 := 0.2$ $T2a := 0.025$ $T2b := 0.005$ $T2c := 0.001$ $KR1(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T2a)}$ $KR2(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T2b)}$ $KR3(\omega) := \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T2c)}$	Stałe czasowe pierwszego obiektu inercyjnego. Szeregowe połączenie obiektu inercyjnego pierwszego rzędu z obiektem całkującym. Stałe czasowe drugiego obiektu inercyjnego. Szeregowe połączenie dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu z obiektem całkującym. *– wywołaj wykresy x–y i określ ich parametry jak w przykładzie obliczeń z tabeli 1.3.2*



Rys. 1.5.8. Charakterystyki częstotliwościowe rzeczywistych obiektów całkujących

1.6. Charakterystyki obiektu różniczkującego

Transmitancję operatorową obiektu różniczkującego określa wzór:

$$Kr(s) = s \cdot Tr \quad . \qquad (1.6.1)$$

Dla s = i· ω otrzymujemy transmitancję widmową obiektu różniczkującego

$$Kr(\omega) = i \cdot \omega \cdot Tr \quad . \qquad (1.6.2)$$

Transmitancję (czasową) obiektu różniczkującego określa wzór:

$$Kr(t) = Tr \cdot \Delta(t) \quad , \text{ gdzie } \Delta(t) \text{ – delta Diraca.} \qquad (1.6.3)$$

[*Program Mathcad stosuje oznaczenie Δ(t) w miejsce powszechnie stosowanego δ(t)*].

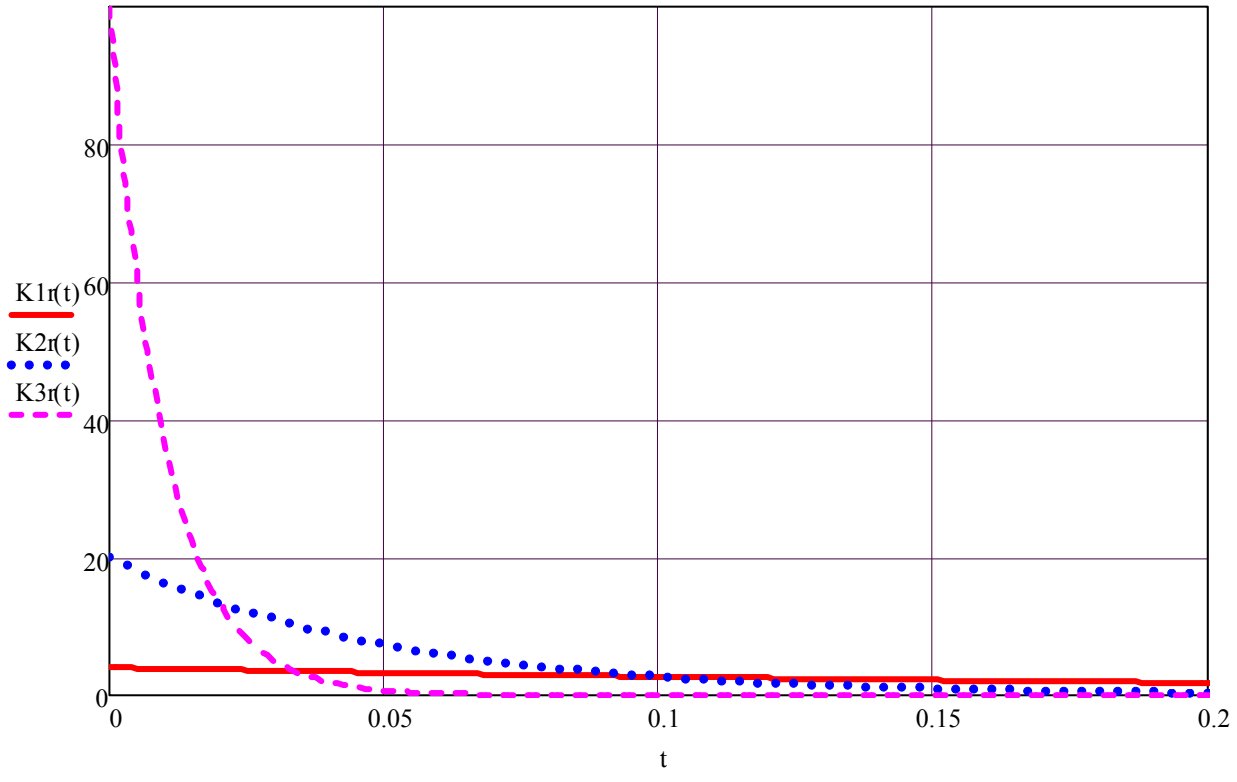
W zastosowaniach technicznych obiekt różniczkujący modelowany jest jako szeregowe połączenie obiektu różniczkującego z obiektem inercyjnym pierwszego lub drugiego rzędu albo jako szeregowe połączenie obiektu różniczkującego z dwoma obiektami inercyjnymi pierwszego rzędu.

Tabela 1.6.1.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Obiekt różniczkujący: transformaty sygnału wyjściowego	Transformata sygnału wyjściowego.
	Charakterystyka czasowa – odwrotna transformata Laplace'a.
$\frac{1}{s} \cdot s \cdot Tr$	*– zaznacz zmienną s* *– z menu Symbolics wybierz Transform* *– wybierz Inverse Laplace*
$Tr \cdot \Delta(t)$	Procesor symboliczny programu wpisze: $Tr \cdot \Delta(t)$ pod wzorem transformaty sygnału wyjściowego.
$\frac{1}{s} \cdot \frac{s \cdot Tr}{(1 + s \cdot T1)}$	Transformata sygnału wyjściowego dla szeregowego połączenia obiektu inercyjnego pierwszego rzędu i obiektu różniczkującego.
$\frac{Tr \cdot e^{-\frac{t}{T1}}}{T1}$	Charakterystyka czasowa szeregowego połączenia obiektu inercyjnego pierwszego rzędu i obiektu różniczkującego.
$\frac{1}{s} \cdot \frac{s \cdot Tr}{(1 + s \cdot T1) \cdot (1 + s \cdot T2)}$	Transformata sygnału wyjściowego szeregowego połączenia dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu i obiektu różniczkującego.
	Charakterystyka czasowa szeregowego połączenia dwóch obiektów inercyjnego pierwszego rzędu i obiektu różniczkującego.
$\frac{Tr \cdot e^{-\frac{t}{T1}} - Tr \cdot e^{-\frac{t}{T2}}}{T1 - T2}$	Tr – stała czasowa obiektu różniczkującego. T1, T2 – stałe czasowe obiektów inercyjnych.

Tabela 1.6.2.

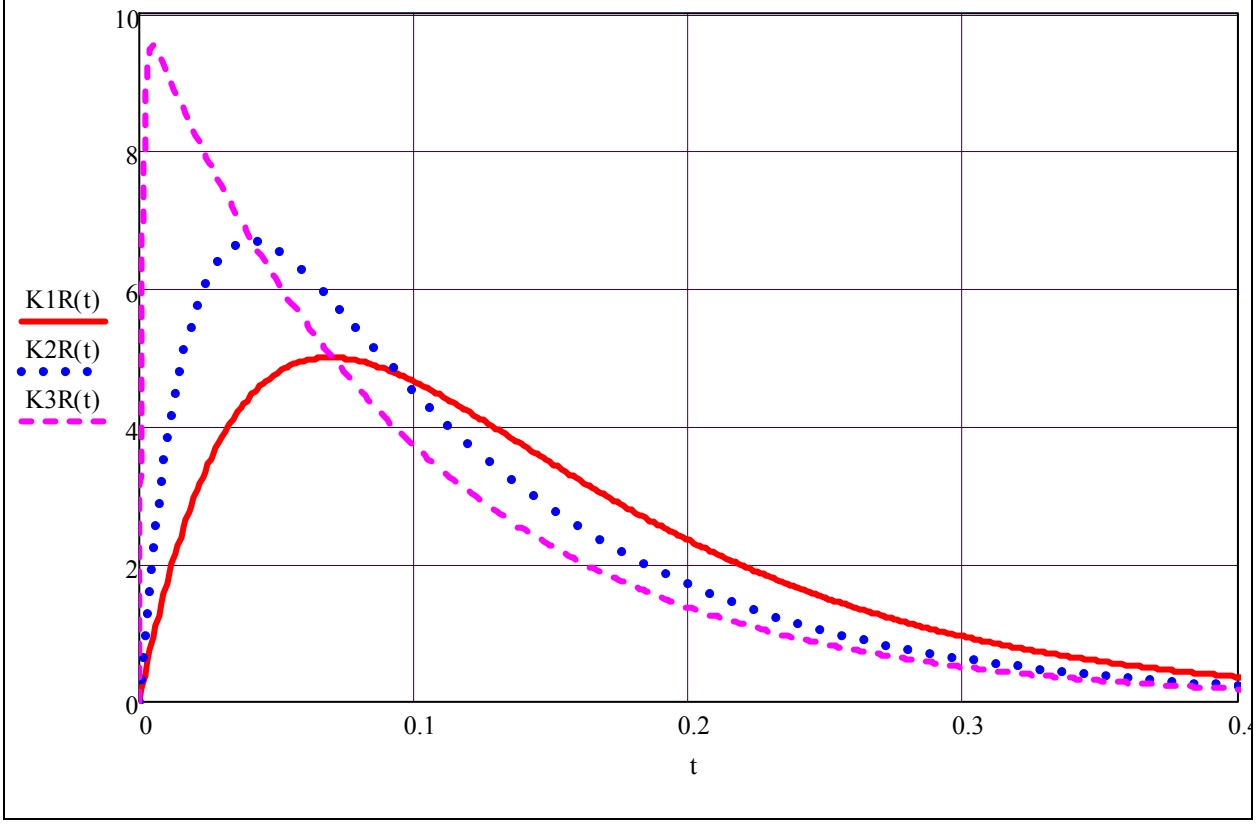
(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Obiekt różniczkujący rzeczywisty: charakterystyki czasowe szeregowego połączenia obiektu inercyjnego pierwszego rzędu i obiektu różniczkującego $t := 0, 0.001 .. 1 \qquad Tr := 1$ $Ta := 0.25 \qquad T1b := 0.05 \qquad T1c := 0.01$ $K1r(t) := \frac{Tr \cdot e^{-\frac{t}{T1a}}}{T1a}$ $K2r(t) := \frac{Tr \cdot e^{-\frac{t}{T1b}}}{T1b}$ $K3r(t) := \frac{Tr \cdot e^{-\frac{t}{T1c}}}{T1c}$	Dla sygnału wejściowego x(t) = 1(t) funkcja skokowa Heaviside'a, sygnał wyjściowy obiektu różniczkującego wynosi: y(t) = x(t)· Kr(t) = Kr(t) = Tr · Δ(t) Delta Diraca – funkcja impulsowa Δ to obiekt matematyczny o właściwościach $\Delta(t) = \begin{cases} +\infty \text{ dla } t = 0 \\ 0 \text{ dla } t \neq 0 \end{cases}$ Tr – stała czasowa obiektu różniczkującego. T1a, T1b, T1c – stałe czasowe obiektów inercyjnych. *– wywołaj wykresy x–y i określ ich parametry jak w przykładzie obliczeń z tabeli 1.3.2*



Rys. 1.6.2. Charakterystyki czasowe rzeczywistego obiektu różniczkującego

Tabela 1.6.3.

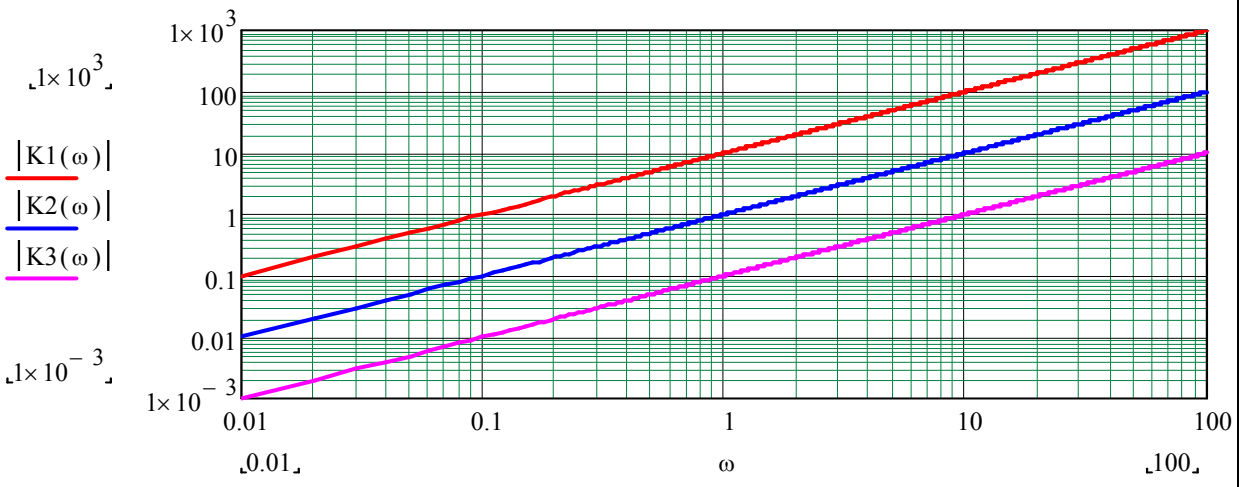
(okno robocze programu Mathcad) *– w polu tekstowym wpisz temat:*	*Komentarz:*
Charakterystyki czasowe szeregowego połączenia dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu z obiektem różniczkującym $t := 0, 0.001 .. 1 \qquad Tr := 1 \qquad T1 := 0.1$ $T2a := 0.05 \quad T2b := 0.02 \qquad T2c := 0.001$ $K1R(t) := \frac{Tr \cdot e^{-\frac{t}{T1}} - Tr \cdot e^{-\frac{t}{T2a}}}{T1 - T2a}$ $K2R(t) := \frac{Tr \cdot e^{-\frac{t}{T1}} - Tr \cdot e^{-\frac{t}{T2b}}}{T1 - T2b}$ $K3R(t) := \frac{Tr \cdot e^{-\frac{t}{T1}} - Tr \cdot e^{-\frac{t}{T2c}}}{T1 - T2c}$	Tr – stała czasowa obiektu różniczkującego. T1 – stała czasowa pierwszego obiektu inercyjnego. Stałe czasowe dla drugiego obiektu inercyjnego. Obiekty różniczkujące rzeczywiste. *– wywołaj wykresy x–y i określ ich parametry jak w przykładzie obliczeń z tabeli 1.3.2* *Charakterystyki czasowe przedstawione są na rysunku 1.6.2.*



Rys. 1.6.3. Charakterystyki czasowe szeregowego połączenia obiektu różniczkującego z dwoma obiektami inercyjnymi pierwszego rzędu dla: Tr = 1, T1 = 0.1, T2a = 0.05, T2b = 0.2, T2c = 0.001

Tabela 1.6.4.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki amplitudowe obiektu różniczkującego $i := \sqrt{-1}$ $\omega := 0.01 , 0.02 .. 100$ $Tr1 := 10$ $Tr2 := 1$ $Tr3 := 0.1$ $K1(\omega) := i \cdot \omega \cdot Tr1$ $K2(\omega) := i \cdot \omega \cdot Tr2$ $K3(\omega) := i \cdot \omega \cdot Tr3$	Stałe czasowe obiektów różniczkujących Tr1, Tr2, Tr3 Transmitancje widmowe idealnych obiektów różniczkujących. *Wyznaczanie wartości stałej czasowej obiektu różniczkującego* Z charakterystyki amplitudowej obiektu różniczkującego odczytujemy wartość częstotliwości, dla której moduł transmitancji jest równy 1, następnie z warunku $\omega \cdot Tr = 1$ obliczamy wartość stałej czasowej Tr.



Rys. 1.6.4. Charakterystyki amplitudowe obiektu różniczkującego dla: Tr1 = 10, Tr2 = 1, Tr3 = 0.1

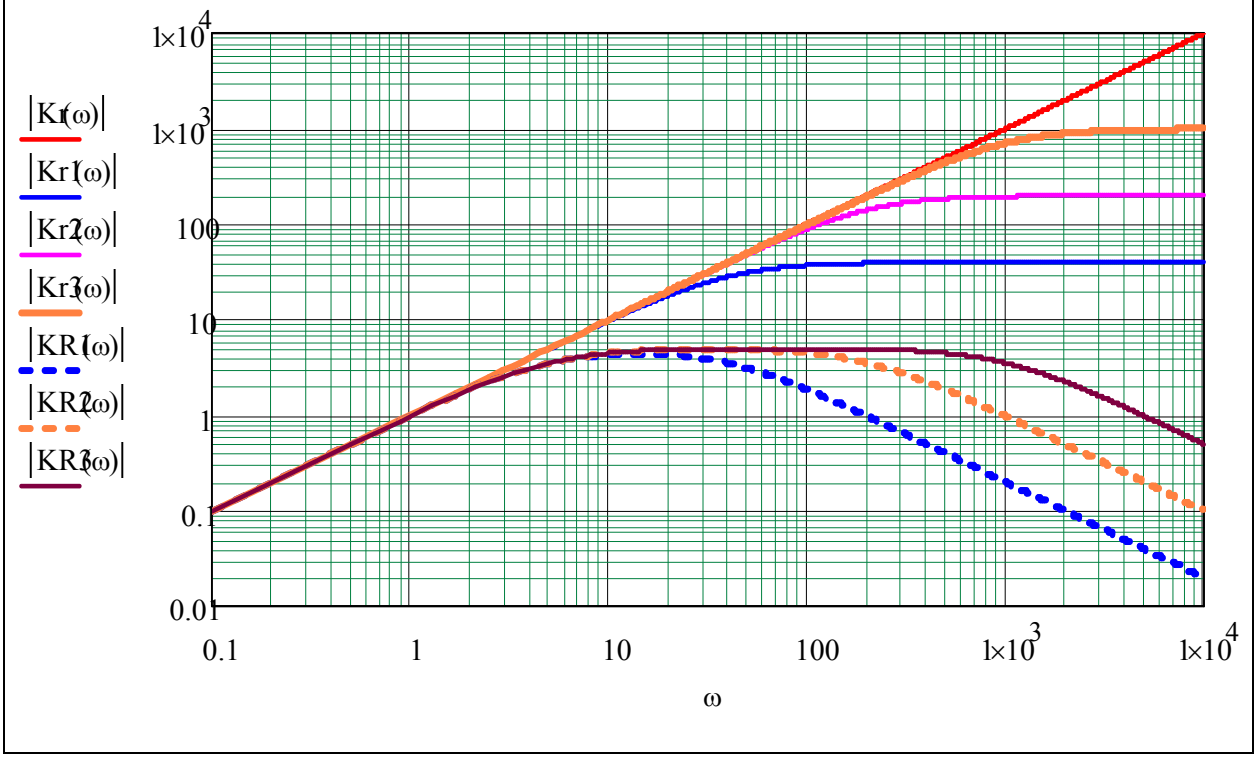
Podsumowanie

Wynik porównania charakterystyk czasowych rzeczywistych obiektów różniczkujących wskazuje, że podstawowe właściwości rzeczywistego obiektu różniczkującego modelowanego w postaci szeregowego połączenia z obiektami inercyjnymi pierwszego rzędu określa największa wartość stałej czasowej obiektu inercyjnego. W praktyce technicznej wartość kolejnej stałej czasowej szeregowo połączonych obiektów inercyjnych jest kilka razy mniejsza od wartości poprzedniej stałej czasowej, tzn. Tr >> T1 > T2.

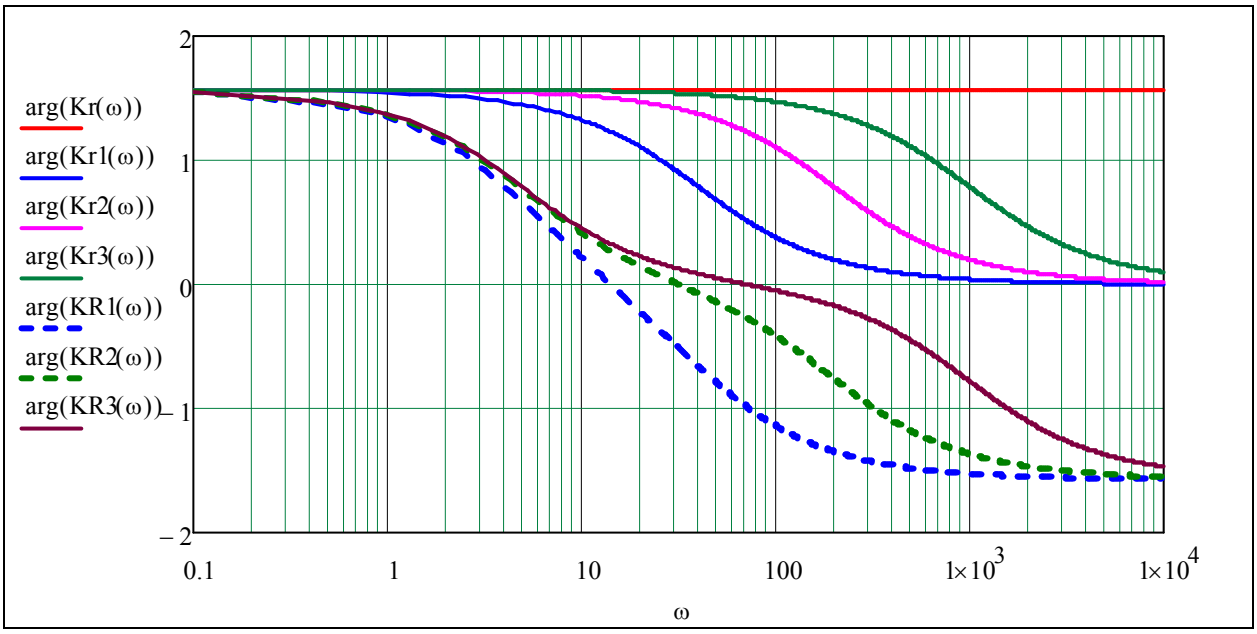
Argument transmitancji obiektu różniczkującego (idealnego) wynosi $\pi / 2$ i nie zależy od częstotliwości sinusoidalnie zmiennego sygnału wejściowego, tzn., że Re(Kr(ω)) = 0 i wszystkie sinusoidalnie zmienne sygnały wyjściowe obiektu różniczkującego wyprzedzają sygnał wejściowy o kąt 90° określony względem fazy sygnału wejściowego.

Tabela 1.6.5.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki amplitudowe i fazowe rzeczywistego obiektu różniczkującego $\omega := 0.1 , 0.5 .. 10000$ $Tr := 1 \quad T1a := 0.025 \quad T1b := 0.005 \quad T1c := 0.001$ $Kr1(\omega) := \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1a)}$ $Kr2(\omega) := \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1b)}$ $Kr3(\omega) := \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1c)}$ $T1 := 0.2 \quad T2a := 0.025 \quad T2b := 0.005 \quad T2c := 0.001$ $KR1(\omega) := \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T2a)}$ $KR2(\omega) := \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T2b)}$ $KR3(\omega) := \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1 + i\cdot\omega\cdot T2c)}$	Krok obliczeń (liczbę punktów obliczeniowych) w przedziałach zmiennych należy dostosować do technicznych możliwości komputera wykonującego obliczenia (wielkość pamięci wirtualnej) oraz możliwości procesora programu Mathcad. Duża liczba punktów obliczeniowych wydłuża czas wykonywania obliczeń, może być przyczyną przerwania pracy programu. *– wywołaj wykresy x–y i określ ich parametry jak w przykładzie obliczeń z tabeli 1.3.2* *Charakterystyki rzeczywistego obiektu różniczkującego przedstawiają rysunki: 1.6.5, 1.6.6.*



Rys. 1.6.5. Charakterystyki amplitudowe obiektów różniczkujących – idealnego i rzeczywistych



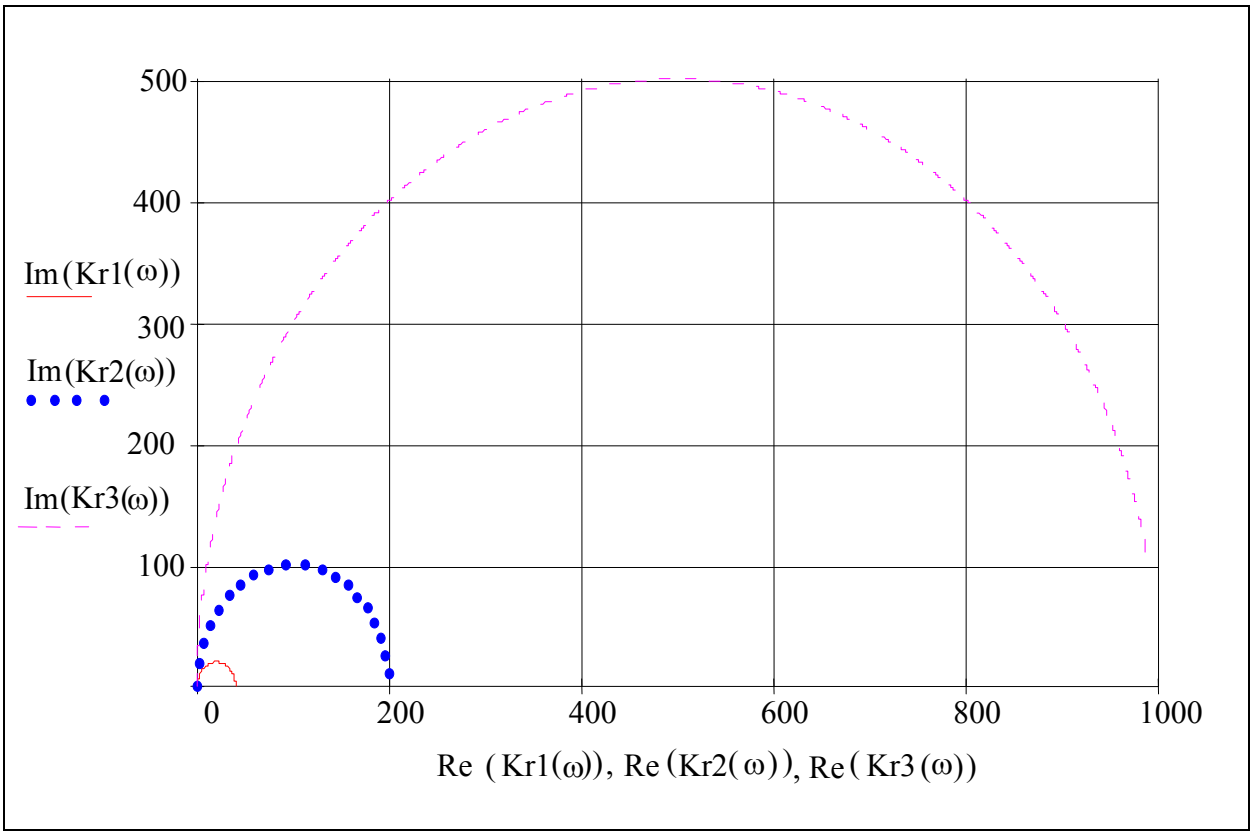
Rys. 1.6.6. Charakterystyki fazowe obiektów różniczkujących – idealnego i rzeczywistych

Tabela 1.6.6.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki częstotliwościowe szeregowego połączenia obiektu różniczkującego z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu $\omega := 0, 10 .. 10000$ $Tr := 1$ $T1a := 0.025 \quad T1b := 0.005 \quad T1c := 0.001$ $Kr1(\omega) := \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1a)}$ $Kr2(\omega) := \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1b)}$ $Kr3(\omega) := \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{(1 + i\cdot\omega\cdot T1c)}$	Stała czasowa obiektu różniczkującego. Stałe czasowe obiektu inercyjnego. *– wywołaj wykresy x–y i określ ich parametry jak w przykładzie obliczeń z tabeli 1.3.2* *Charakterystyki częstotliwościowe przedstawiono na rysunku 1.6.7.*

Podsumowanie

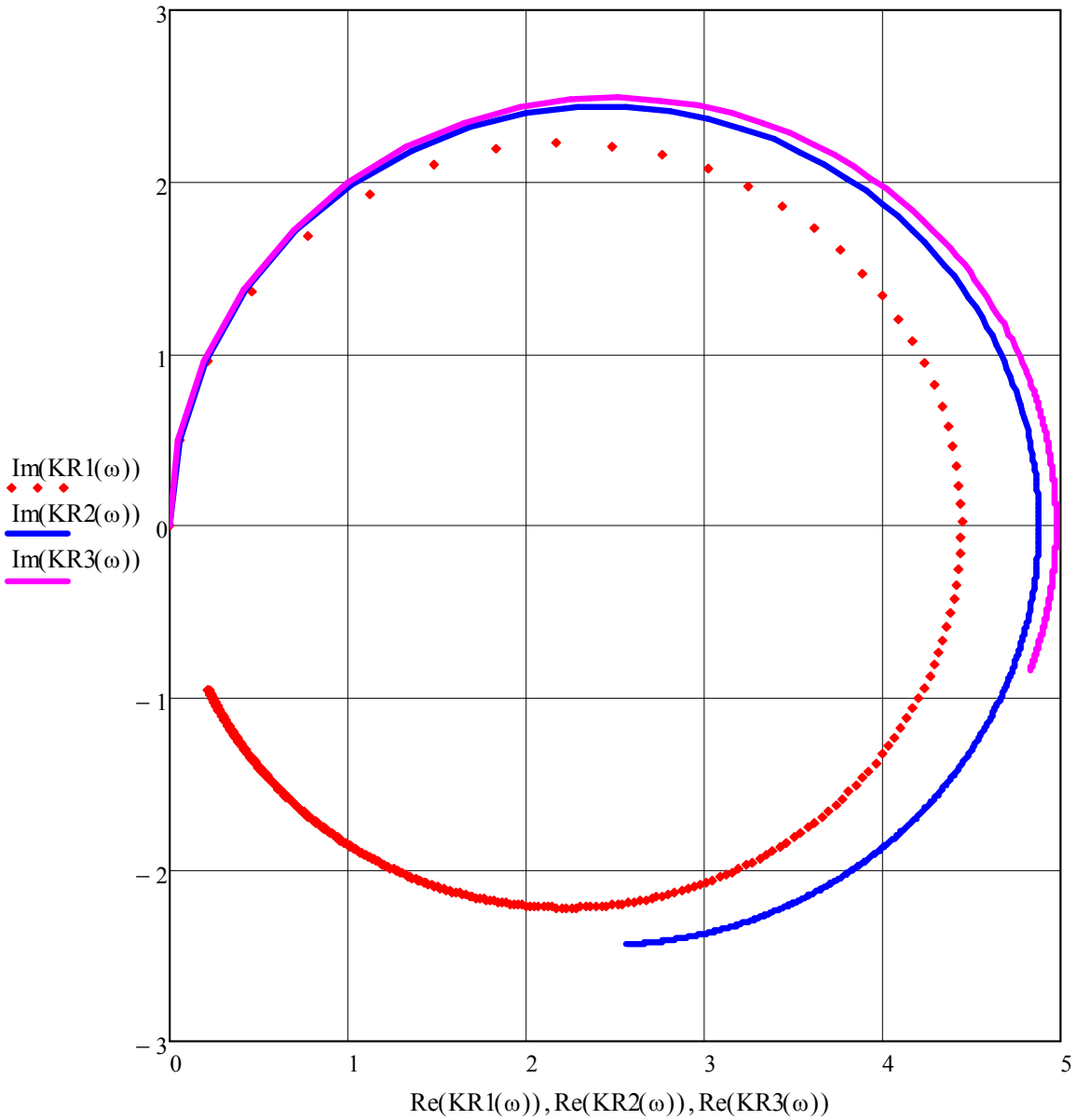
Charakterystyki amplitudowe oraz fazowe obiektów różniczkujących przedstawione na rysunkach 1.6.5 i 1.6.6 oraz charakterystyki amplitudowe i fazowe obiektów całkujących przedstawione na rysunkach 1.5.5, 1.5.6 i 1.5.7 zostały wyznaczone dla identycznych wartości stałych czasowych. Porównując charakterystyki fazowe obiektów całkujących i obiektów różniczkujących, dostrzegamy ich podobieństwo. Charakterystyki fazowe obiektów całkujących są przesunięte względem charakterystyk fazowych obiektów różniczkujących o wartość $-\pi$.



Rys. 1.6.7. Charakterystyki częstotliwościowe szeregowego połączenia obiektu różniczkującego z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu dla:
Tr = 1, T1a = 0.025, T1b = 0.005, T1c = 0.001

Tabela 1.6.7.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki częstotliwościowe szeregowego połączenia dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu z obiektem różniczkującym $\omega := 0, 0.5 .. 200 \qquad Tr := 1$ $T1 := 0.2$ $T2a := 0.025 \qquad T2b := 0.005 \qquad T2c := 0.001$ $KR1(\omega) := \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{(1+i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T2a)}$ $KR2(\omega) := \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{(1+i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T2b)}$ $KR3(\omega) := \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{(1+i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T2c)}$	T1 – stała czasowa pierwszego obiektu inercyjnego. T2 – stała czasowa drugiego obiektu inercyjnego. *– wywołaj wykresy x–y i określ ich parametry jak w przykładzie obliczeń z tabeli 1.3.2* *Charakterystyki częstotliwościowe przedstawiono na rysunku 1.6.8.*

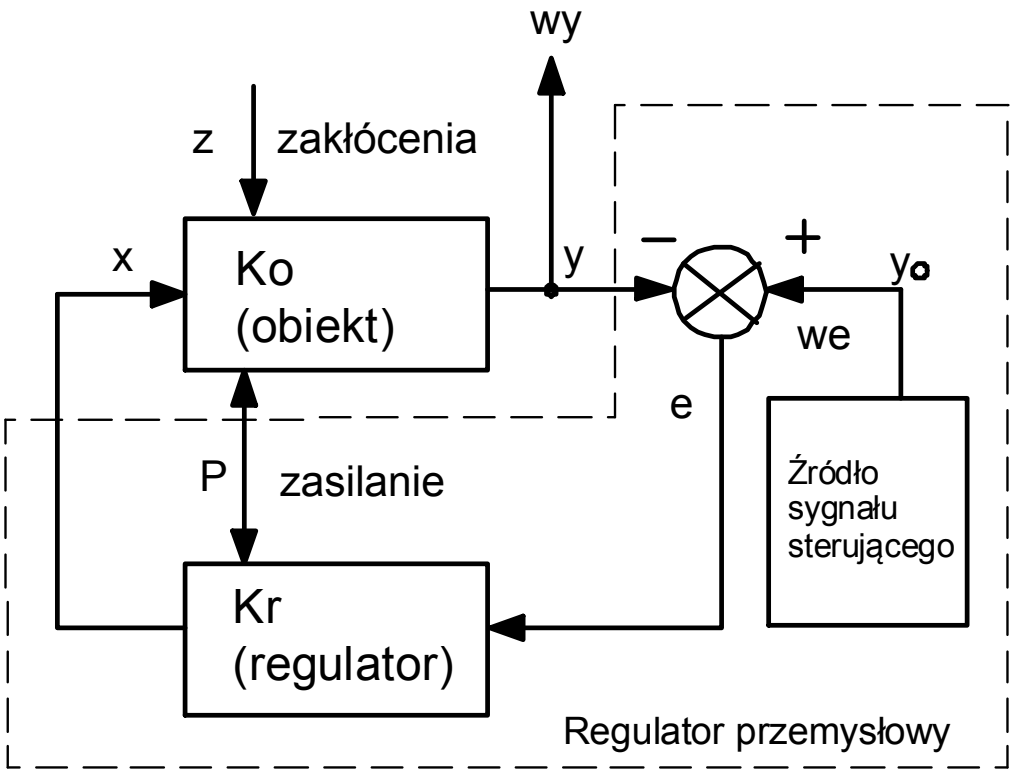


Rys. 1.6.8. Charakterystyki częstotliwościowe szeregowego połączenia dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu z obiektem różniczkującym dla: Tr = 1, T1=0.2, T2a = 0.025, T2b = 0.005, T2c = 0.001

1.7. Modelowanie regulatora PID

Układ regulacji jednej zmiennej jest przedstawiony na rysunku 1.7.1.

Sygnał regulowany y to sygnał, którego wartość mimo oddziaływania zmiennych czynników zewnętrznych (w automatyce mówimy o oddziaływaniu sygnałów zakłócających z) ma być stała lub zmieniać się zgodnie z sygnałem sterującym y_o. Porównywanie sygnału wyjściowego z sygnałem sterującym wykonuje węzeł sumujący. Wynik porównania jako sygnał $e = (y_o - y)$ nazywany jest sygnałem błędu regulacji, który przez obiekt Kr nazywany regulatorem działa na obiekt główny Ko. Regulator to obiekt automatyki, którego zadaniem jest wytwarzanie takiego sygnału regulującego x, aby sygnał y wyjściowy obiektu jak najmniej różnił się od sygnału sterującego y_o, tzn. by sygnał e błędu regulacji był jak najmniejszy.



Rys. 1.7.1. Schemat ideowy prostego układu regulacji jednej zmiennej wyjściowej y

Jeżeli układ regulacji utrzymuje (stabilizuje), niezależnie od działających zakłóceń, sygnał wyjściowy y na stałym poziomie równym sygnałowi sterującemu y_o, to wykonuje zadanie regulacji stabilizacyjnej (regulacja stałowartościowa).

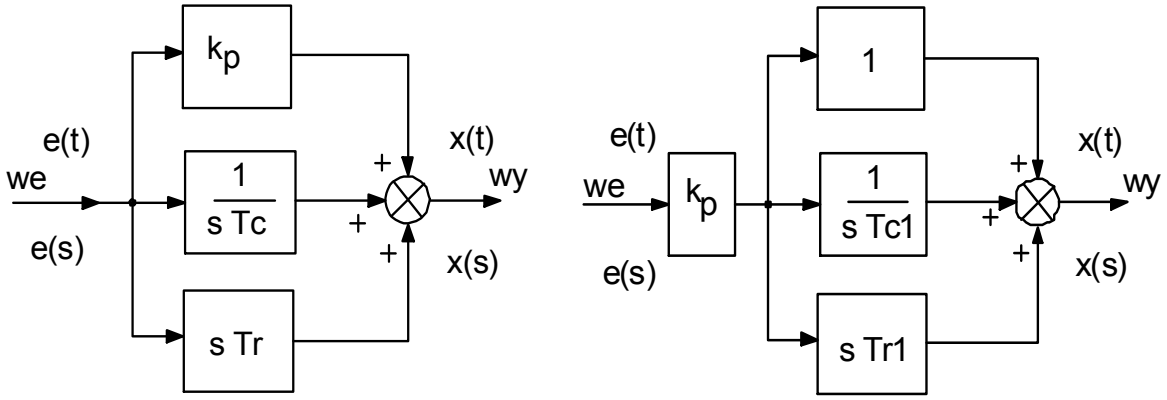
Jeżeli sygnał wyjściowy y układu regulacji śledzi losowo zmieniające się zmiany sygnału sterującego y_o (nadąża za zmianami), niezależnie od działających zakłóceń, to wykonuje zadanie regulacji śledzącej (nadążnej).

Odmianą regulacji śledzącej jest regulacja programowa, w której wymaga się, by sygnał wyjściowy y układu regulacji zmieniał się zgodnie z wcześniej ustalonym sygnałem sterującym y_O (tzn. zgodnie z programem zmian wartości sygnału sterującego), niezależnie od działających zakłóceń.

```
```

Najczęściej stosowaną zasadą pracy regulatora (algorytm PID) jest sumowanie działania proporcjonalnego, całkującego i różniczkującego, które wykonywane są na sygnale błędu regulacji, który może być sygnałem ciągłym (analogowym) lub dyskretnym (cyfrowym). Algorytm ten, łącząc trzy podstawowe cechy sygnału błędu regulacji e, wytwarza sygnał sterujący x, który skutecznie wpływa na zachowania obiektu regulacji (wpływa na wartości y jego sygnału wyjściowego). Działanie proporcjonalne regulatora określa udział aktualnej wartości sygnału błędu regulacji w sygnale sterującym. Działanie całkujące opisuje udział historycznych zmian wartości sygnału błędu regulacji w sygnale sterującym. Działanie różniczkujące wyraża udział aktualnych tendencji zmian sygnału błędu regulacji w sygnale sterującym.

Na rysunku 1.7.2 przedstawione są dwie podstawowe struktury regulatorów przemysłowych działające według algorytmu PID-IND lub algorytmu PID-ISA.



Rys. 1.7.2. Struktura przemysłowych regulatorów działających według algorytmów PID

Regulator PID jest obiektem złożonym, którego podstawowa (idealna) struktura zawiera trzy równolegle połączone obiekty: proporcjonalny z wzmocnieniem kp, całkujący ze stałą czasową Tc i różniczkujący ze stałą czasową Tr. Zgodnie z definicją transmitancji transmitancja zastępcza obiektów połączonych równolegle jest sumą transmitancji tych obiektów. Modelując regulator PID do realizacji potrzeb obiektu regulacji zgodnie z przyjętymi założeniami projektowymi lub wymaganej dokładności odwzorowania właściwości rzeczywistego układu regulacji, zakłada się, że obiekty funkcyjne regulatora (wzmocnienie, całkowanie, różniczkowanie) są obiektami idealnymi lub obiektami rzeczywistymi. Modele rzeczywistych regulatorów PID mogą uwzględniać konstrukcyjne ograniczenia maksymalnych wartości sygnałów wejściowych i wyjściowych w obiektach funkcyjnych (tzw. nasycenie) lub skończoną wartości wzmocnienia i ograniczoną szerokości częstotliwościowego pasma wzmocnienia obiektów proporcjonalnych (wzmacniaczy) użytych do budowy obiektów funkcyjnych. W praktycznych zastosowaniach algorytmu PID zadowalające odwzorowanie konstrukcyjnych właściwości rzeczywistych obiektów funkcyjnych regulatora zapewniają modele szeregowego połączenia idealnego obiektu funkcyjnego z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu.

Transmitancję operatorową regulatora z idealnym algorytmem PID-IND określa wzór:

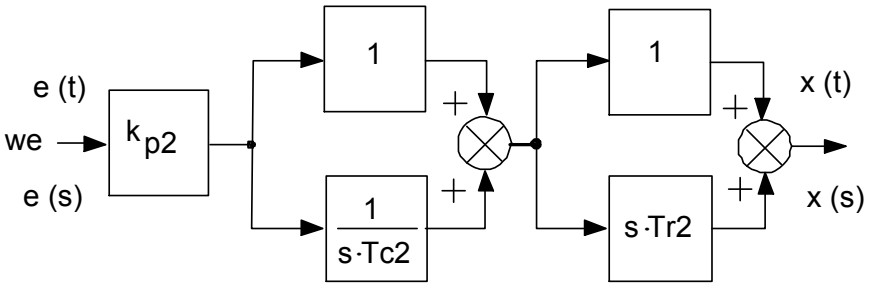
$$Kr(s) = k_p + \frac{1}{s \cdot Tc} + s \cdot Tr \tag{1.7.1}$$

Transmitancję operatorową regulatora z algorytmem PID-ISA określa wzór:

$$Kr(s) = k_p \cdot (1 + \frac{1}{s \cdot Tc1} + s \cdot Tr1) \tag{1.7.2}$$

```
```

Do realizacji celów poznania właściwości układów regulacji na podstawie analizy transmitancji zastępczej układu regulacji korzystniej jest przedstawić regulator i jego algorytm PID w postaci szeregowego połączenia regulatorów typu PI (proporcjonalno-całkującego) i PD (proporcjonalno-różniczkującego) (zob. rys. 1.7.3).



Rys. 1.7.3. Struktura regulatora PID w postaci szeregowego połączenia regulatorów: PI i PD

Kolejność szeregowo połączonych regulatorów PI, PD, które mają działać zgodnie z algorytmem PID, jest teoretycznie obojętna. W praktyce istnieją różne kryteria ustalania kolejności elementów regulatora. Jednym z nich może być zakres wysterowania obiektów, tzn., że na wejściu włącza się obiekty o najniższej częstotliwości granicznej i małym wzmocnieniu, w tym przypadku regulator PI przed regulatorem PD, a na końcu obiekt proporcjonalny kp2. Innym kryterium ustalania kolejności mogą być właściwości szumowe regulatora. Wówczas korzystna jest odwrotna kolejność, ponieważ obiekt całkujący redukuje szumy stopni wejściowych.

Transmitancję operatorową szeregowego połączenia regulatorów (PI i PD) przedstawionego na rys. 1.7.3 określa wzór:

$$Kr(s) = k_{p2} \cdot (1 + \frac{1}{s \cdot Tc2}) \cdot (1 + s \cdot Tr2) = k_{p2} \cdot \frac{(1 + s \cdot Tc2) \cdot (1 + s \cdot Tr2)}{s \cdot Tc2} \quad . \qquad (1.7.3)$$

Dla $Tc1 = kp \cdot Tc$ i $Tr1 = \frac{Tr}{kp}$ (1.7.4)

algorytm PID-ISA (wzór 1.7.2) ma postać równoważną algorytmowi PID-IND (wzór 1.7.1).

Dla: $kp = kp2 \cdot (1 + \frac{Tr2}{Tc2})$, $Tc1 = Tc2 + Tr2$, $Tr1 = \frac{Tr2 \cdot Tc2}{Tr2 + Tc2}$ (1.7.5)

algorytm PID-ISA (wzór 1.7.2) ma postać równoważną algorytmowi szeregowo połączonych regulatorów PI i PD (wzór 1.7.3).

1.7.1. Charakterystyki czasowe regulatora PID-IND z idealnym algorytmem PID

W praktycznych zastosowaniach algorytmu PID, szczególnie w analogowych realizacjach działania różniczkującego, wielu konstruktorów celowo wprowadza w części różniczkującej dodatkowy obiekt inercyjny, który zmniejszając maksymalną wartości pochodnej sygnału błędu regulacji, jednocześnie zwiększa czas, po którym sygnały charakterystyk czasowych K1r(t1), K2r(t2), K3r(t3) lub K1R(t1), K2R(t2), K3R(t3) obiektów różniczkujących różnią się od zerowej wartości sygnału w stanie ustalonym nie więcej niż wartość błędu porównania (zob. przykłady rzeczywistego różniczkowania przedstawione w tab. 1.6.2 i 1.6.3). W wyniku takiego działania w rzeczywistym obiekcie różniczkującym nie występuje zjawisko ograniczania (nasycania) wartości sygnału wyjściowego i w układzie regulacji może zostać zachowana ciągłość pracy pętli regulacyjnej, zwłaszcza w przypadkach szybkich zmian sygnału sterującego, a końcowy wynik

różniczkującego oddziaływania regulatora nie zależy od wartości stałych czasowych T1, T2 dodatkowo wprowadzonego obiektu inercyjnego.

W procesie rzeczywistego różniczkowania modelowanego jako szeregowe połączenie obiektu różniczkującego z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu (zob. tab. 1.6.2) pole ograniczone wykresem charakterystyki czasowej $K1r(t) := \frac{Tr \cdot e^{-\frac{t}{T1}}}{T1}$

różniczkującej części regulatora PID jest stałe i wynosi: $\int_0^{\infty} \frac{Tr \cdot e^{\frac{-t}{T1}}}{T1} dt = Tr$. (1.7.6)

W procesie rzeczywistego różniczkowania modelowanego jako szeregowe połączenie obiektu różniczkującego z dwoma obiektami inercyjnymi pierwszego rzędu (zob. tab. 1.6.3) charakterystykę czasową określa wzór: $K1R(t) := \frac{Tr \cdot e^{-\frac{t}{T1}} - Tr \cdot e^{-\frac{t}{T2}}}{T1 - T2}$.

Pole ograniczone wykresem tej czasowej charakterystyki również jest stałe i wynosi:

$$\int_0^{\infty} \frac{Tr \cdot e^{\frac{-t}{T1}} - Tr \cdot e^{\frac{-t}{T2}}}{T1 - T2} dt = Tr \quad . \qquad (1.7.7)$$

Właściwości liniowego regulatora PID określa jego transmitancja, która w zależności od zastosowanego algorytmu oraz rzeczywistych lub idealnych obiektów funkcyjnych regulatora (różniczkowanie, całkowanie, wzmocnienie) jest funkcją kilku parametrów (stałe czasowe: inercji, całkowania, różniczkowania, wzmocnienie). Dziedziny analizy (czas, częstotliwość), w których przeprowadza się badanie właściwości regulatora, dostosowuje się do wartości jego parametrów i potrzeb głównego obiektu układu regulacji.

Sygnał wyjściowy regulatora, a także pozostałe sygnały układu regulacji automatycznej zgodnie z definicją transmitancji mogą być badane jako parametryczne funkcje czasu. Analiza właściwości wieloparametrowych funkcji czasu nie jest prostym zadaniem. Ostateczną ocenę zachowania regulatorów i układów regulacji przeprowadza się w dziedzinie czasu, porównując sygnały rzeczywiste z sygnałami obliczonymi w procesie analiz teoretycznych. Graficzne zobrazowanie wyników tych analiz, np. w trójwymiarowej przestrzeni, może wspomagać procesy identyfikacji, optymalizacji i doboru parametrów (złożonych) układów sterowania.

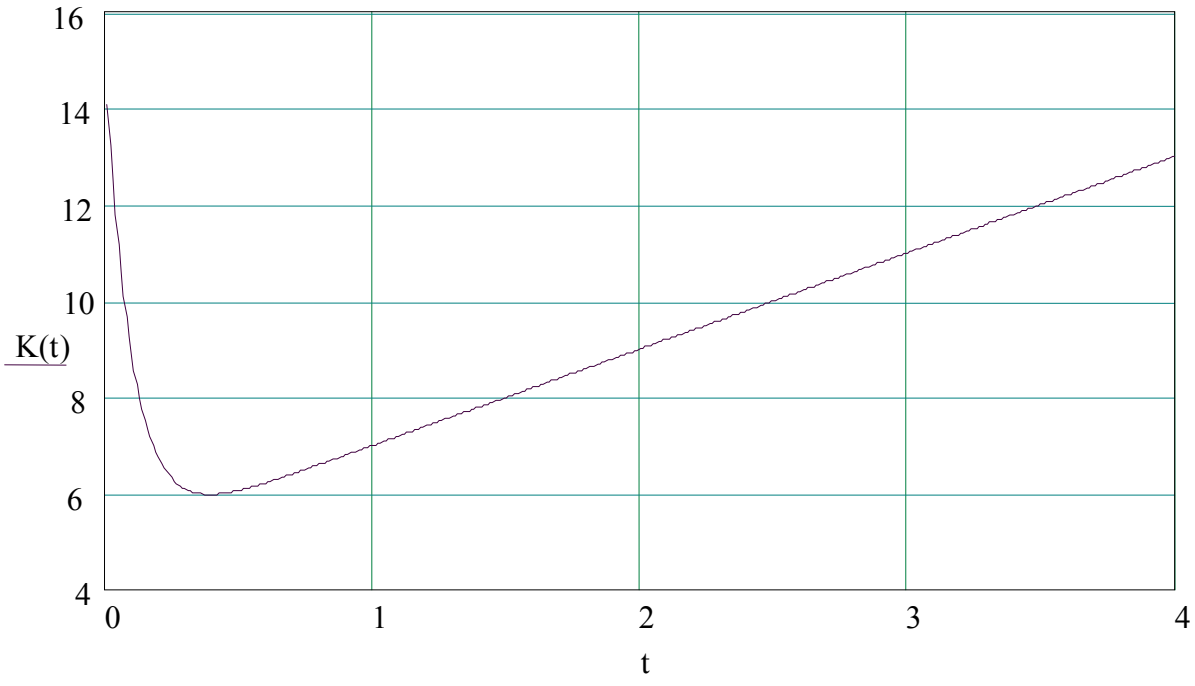
Doświadczalne badanie obiektów, których wartości stałych czasowych są duże, wykonuje się (najczęściej) w dziedzinie czasu – jeden eksperyment skokowej zmiany sygnału sterującego (ciąg pomiarów wartości sygnału wyjściowego) określa charakterystykę czasową obiektu. W dziedzinie częstotliwości przeprowadza się jednoczesne pomiary modułu i fazy sygnału wyjściowego. Pomiary modułu i fazy zwłaszcza w zakresie małych wartości częstotliwości trwają długo i dlatego w praktyce technicznej są rzadko wykonywane.

Charakterystyki częstotliwościowe modeli idealnych i rzeczywistych obiektów są efektywnym narzędziem badawczym i dlatego chętnie wykorzystywane są do wykonywania analiz.

Przedstawione w tym rozdziale przykłady regulatorów i metodyka badania zmian sygnałów wyjściowych jako 3–4 parametrowych funkcji czasu lub częstotliwości mogą być podstawą lub wstępem do badań i optymalizacji właściwości wieloparametrowych układów regulacji.

Tabela 1.7.1.1.

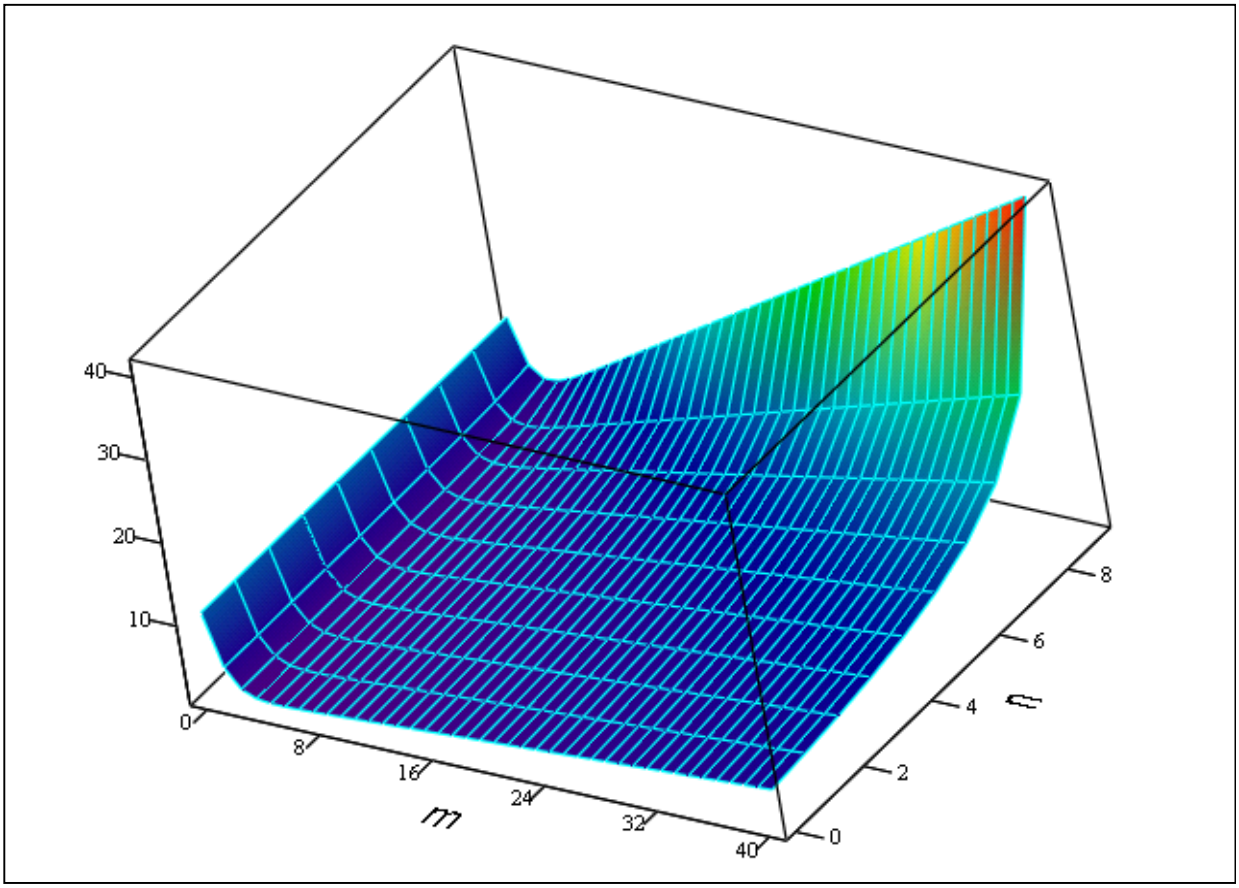
(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyka czasowa regulatora PID-IND z różniczkowaniem rzeczywistym $t := 0.01 , 0.02 .. 4$ $kp := 1 \quad Tc := 0.5 \quad Tr := 1 \quad T1 := 0.1$ $\frac{1}{s}\cdot\left(kp + \frac{1}{s\cdot Tc} + s\cdot\frac{Tr}{1 + s\cdot T1}\right)$ $\frac{T1\cdot t + T1\cdot Tc\cdot kp + Tc\cdot Tr\cdot e^{-\frac{t}{T1}}}{T1\cdot Tc}$ $\frac{T1\cdot s + Tc\cdot kp\cdot s + Tc\cdot Tr\cdot s^2 + T1\cdot Tc\cdot kp\cdot s^2 + 1}{Tc\cdot s^2\cdot(T1\cdot s + 1)}$ $K(t) := \frac{T1\cdot t + T1\cdot Tc\cdot kp + Tc\cdot Tr\cdot e^{-\frac{t}{T1}}}{T1\cdot Tc}$	Wykonaj czynności na podstawie przykładu, który jest przedstawiony w tabeli 1.5.1. *– określ przedział zmian czasu* *– wpisz parametry regulatora rzeczywistego* *– wpisz transformatę Laplace'a sygnału wyjściowego dla regulatora rzeczywistego* Sygnał wyjściowy regulatora (odwrotna transformata Laplace'a – *wynik obliczeń procesora programu Mathcad*). Transformata sygnału wyjściowego *(wynik obliczeń procesora programu Mathcad).* Po wykonaniu dzielenia wielomianu licznika przez wielomian mianownika otrzymujemy wzór początkowy: $\frac{1}{s}\cdot\left(kp + \frac{1}{s\cdot Tc} + s\cdot\frac{Tr}{1 + s\cdot T1}\right)$. Charakterystyka czasowa regulatora dla sygnału wejściowego e(t) = 1(t).



Charakterystyka czasowa regulatora PID-IND z różniczkowaniem rzeczywistym dla: kp = 1, Tc = 0.5, Tr = 1, T1 = 0.1

Tabela 1.7.1.2.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk czasowych regulatora PID-IND z rzeczywistym różniczkowaniem dla zmiennej wartości stałej całkowania $kp := 1 \quad Tr := 1 \quad T1 := 0.1$ $m := 0 .. 40 \qquad n := 0 .. 9$ $t_m := 0 + 0.1 \cdot m \qquad Tc_n := 1 - 0.1 \cdot n$ $K(t, Tc) := \dfrac{T1t + T1 \cdot Tc \cdot kp + Tc \cdot Tr \cdot e^{\frac{-t}{T1}}}{T1 \cdot Tc}$ $K_{m,n} := K(t_m, Tc_n)$	Uwaga: na wykresach zestawieniowych został zmieniony zwrot osi y ↔ n, rosnącym wartościom zmiennej pomocniczej n odpowiadają malejące wartości stałej całkowania Tc. Parametry stałe regulatora oraz zmienne pomocnicze dla macierzy wyników charakterystyki czasowej. Charakterystyka czasowa jako funkcja dwóch zmiennych. Macierz wyników charakterystyki czasowej.

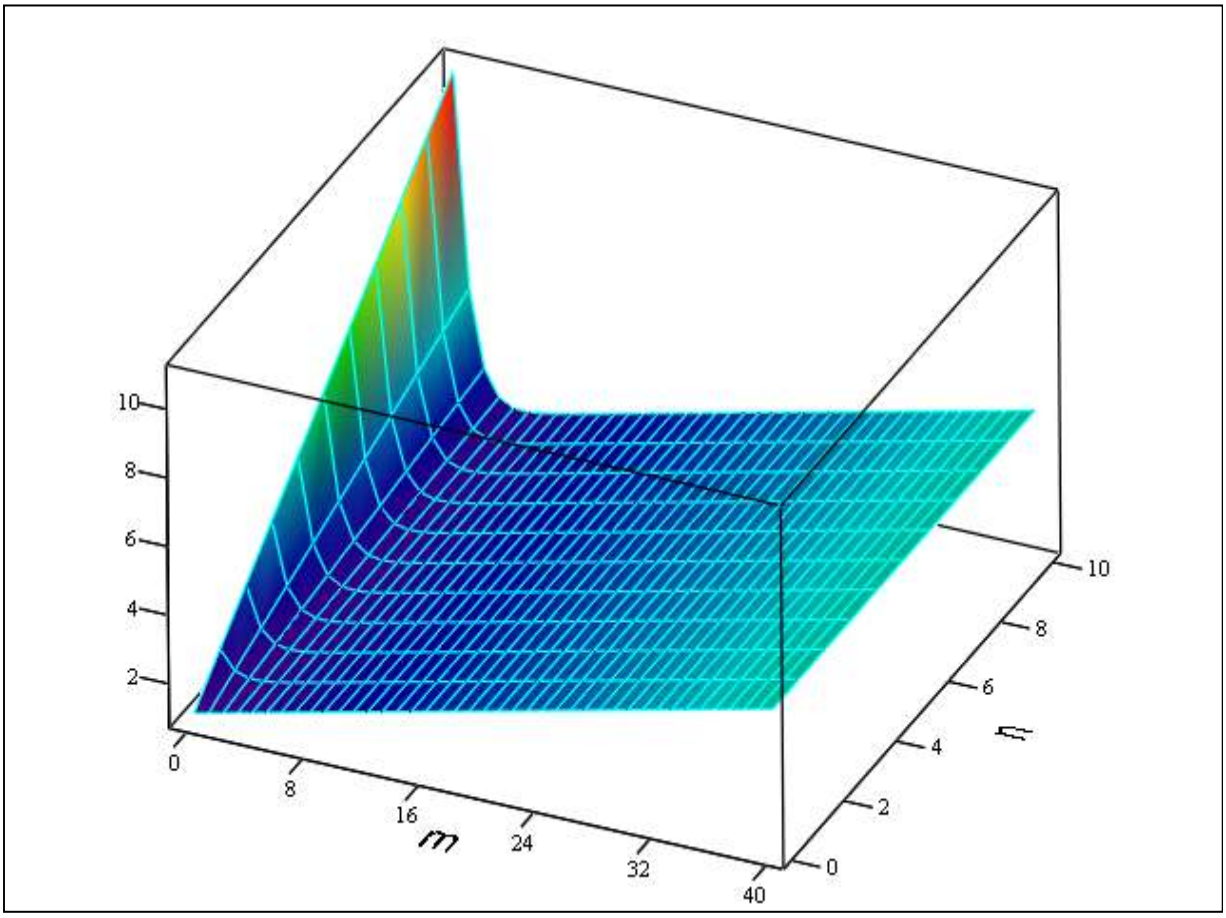


K

Zestawienie charakterystyk czasowych regulatora PID-IND z rzeczywistym różniczkowaniem dla zmiennej wartości stałej całkowania

Tabela 3.7.1.3.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk czasowych regulatora PID-IND z rzeczywistym różniczkowaniem dla zmiennej wartości stałej różniczkowania $kp := 1 \quad Tc := 1 \quad T1 := 0.1$ $m := 0 .. 40 \qquad n := 0 .. 10$ $t_m := 0 + 0.1\,m \qquad Tr_n := 0.1 \cdot n$ $K(t, Tr) := \dfrac{T1\,t + T1 \cdot Tc \cdot kp + Tc \cdot Tr \cdot e^{\frac{-t}{T1}}}{T1 \cdot Tc}$ $K_{m,n} := K(t_m, Tr_n)$	Parametry stałe regulatora. Zmienne pomocnicze dla macierzy wyników charakterystyki czasowej. Charakterystyka czasowa jako funkcja dwóch zmiennych. Macierz wyników charakterystyki czasowej.

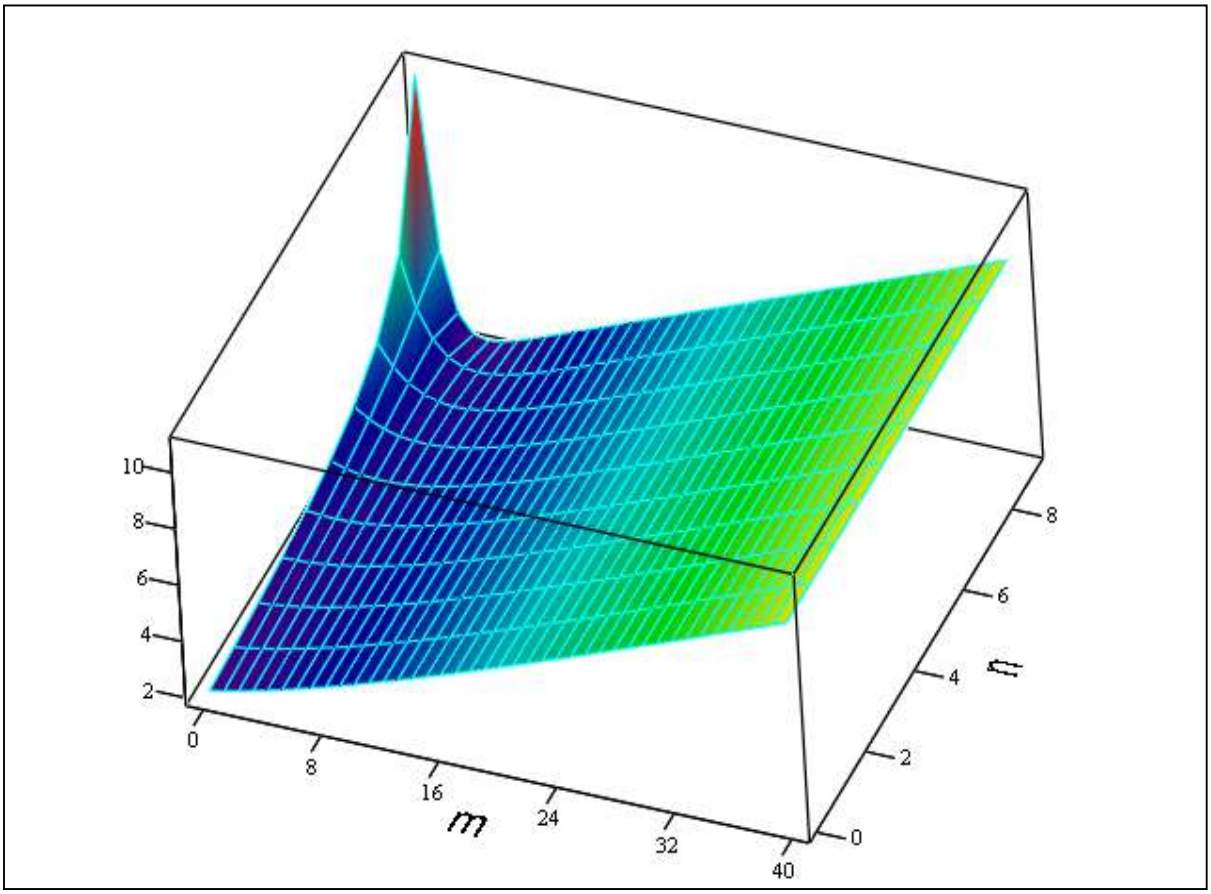


K

Zestawienie charakterystyk czasowych regulatora PID-IND z rzeczywistym różniczkowaniem dla zmiennej wartości stałej różniczkowania

Tabela 1.7.1.4.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk czasowych regulatora PID-IND z rzeczywistym różniczkowaniem dla zmiennej wartości wzmocnienia	
$Tc := 0.5 \quad Tr := 1 \quad T1 := 0.1$	Parametry stałe regulatora.
$m := 0 .. 40 \quad n := 0 .. 10$	Zmienne pomocnicze dla macierzy wyników charakterystyki czasowej.
$t_m := 0 + 0.1\,m \quad kp_n := n$	
$K(t, kp) := \frac{T1 \cdot t + T1 \cdot Tc \cdot kp + Tc \cdot Tr \cdot e^{-\frac{t}{T1}}}{T1 \cdot Tc}$	Charakterystyka czasowa jako funkcja dwóch zmiennych.
$K_{m,n} := K(t_m, kp_n)$	Macierz wyników charakterystyki czasowej.

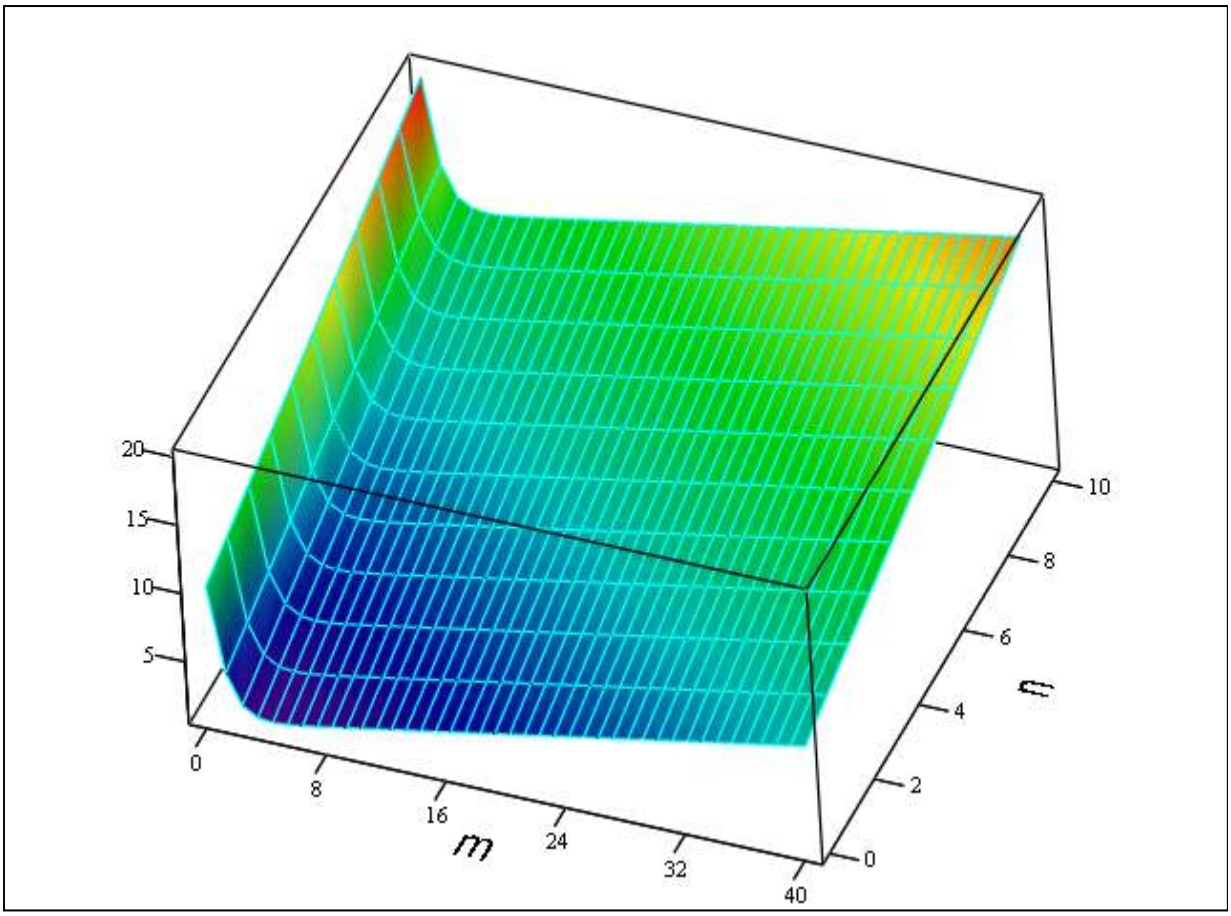


K

Zestawienie charakterystyk czasowych regulatora PID-IND z rzeczywistym różniczkowaniem dla zmiennej wartości wzmocnienia

Tabela 1.7.1.5.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk czasowych regulatora PID-IND z rzeczywistym różniczkowaniem dla zmiennej wartości stałej czasowej bloku inercyjnego $Tc := 0.5 \quad Tr := 1 \quad kp := 1$ $m := 0 .. 40 \quad n := 0 .. 9$ $t_m := 0 + 0.1 m \quad T1_n := 1 - 0.1 \cdot n$ $K(t, T1) := \frac{T1 \cdot t + T1 \cdot Tc \cdot kp + Tc \cdot Tr \cdot e^{-\frac{t}{T1}}}{T1 \cdot Tc}$ $K_{m,n} := K(t_m, T1_n)$	Uwaga: na wykresach zestawieniowych został zmieniony zwrot osi y ↔ n, rosnącym wartościom zmiennej pomocniczej n odpowiadają malejące wartości stałej czasowej T1. Parametry stałe regulatora oraz zmienne pomocnicze dla macierzy wyników charakterystyki czasowej. Charakterystyka czasowa jako funkcja dwóch zmiennych. Macierz wyników charakterystyki czasowej.



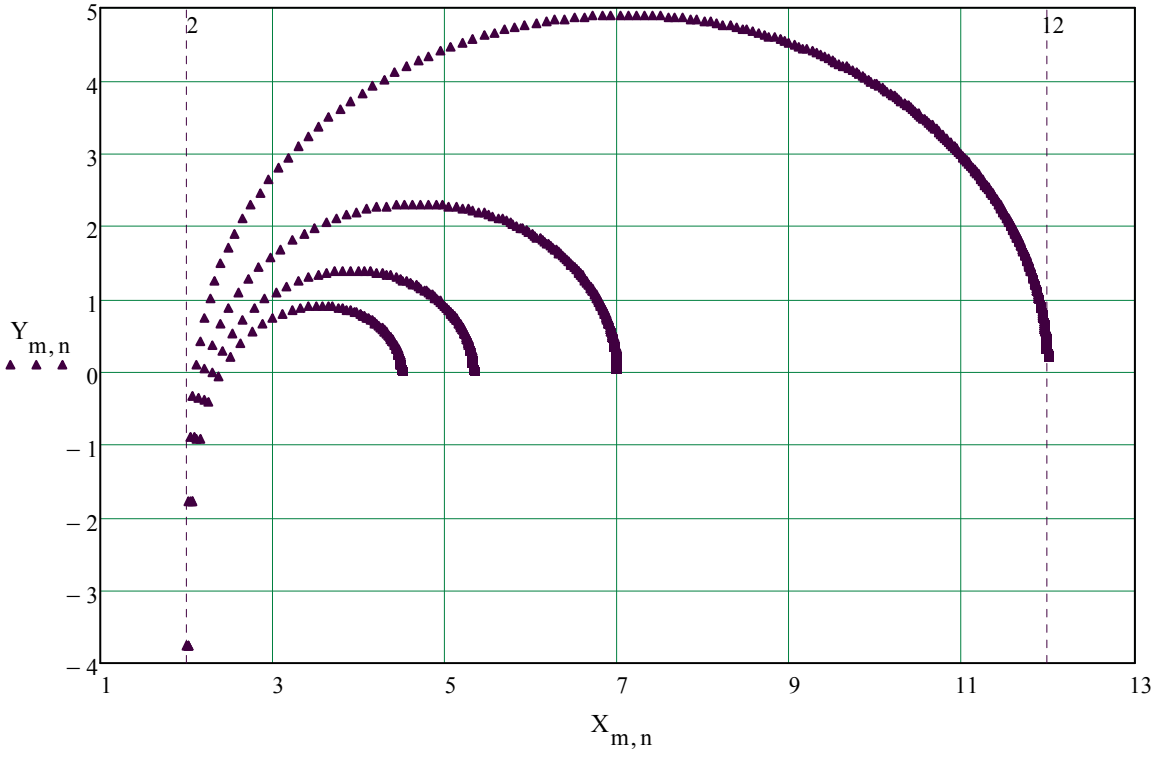
K

Zestawienie charakterystyk czasowych regulatora PID-IND z rzeczywistym różniczkowaniem dla zmiennej wartości stałej czasowej bloku inercyjnego

1.7.2. Charakterystyki częstotliwościowe regulatora PID-IND z rzeczywistym różniczkowaniem

Tabela 1.7.2.1.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki częstotliwościowe regulatora PID-IND z rzeczywistym różniczkowaniem dla różnych wartości stałej czasowej bloku inercyjnego $Tc := 1 \quad Tr := 1 \quad kp := 2 \quad T1 := 0.1$ $m := 1, 5 .. 10000$ $n := 1 .. 4$ $K(m,n) := kp + \frac{1}{i \cdot \frac{m}{20} \cdot Tc} + \frac{i \cdot \frac{m}{20} \cdot Tr}{1 + i \cdot \frac{m}{20} \cdot T1 \cdot n}$ $X_{m,n} := Re(K(m,n))$ $Y_{m,n} := Im(K(m,n))$	*Wykonaj czynności na podstawie przykładu, który jest przedstawiony w tabeli 1.3.6.* *– wpisz parametry regulatora rzeczywistego* *– określ krok obliczeń i przedział zmian częstotliwości, $\omega = 0.05 \cdot m$* *– określ przedział zmian stałej czasowej T1* *– wpisz transmitancję regulatora jako funkcję dwóch zmiennych* *– określ wektor części rzeczywistej* *– określ wektor części urojonej* *– utwórz wykres jednego wektora w funkcji drugiego wektora* *– wybierz punkty jako ślad linii wykresu*

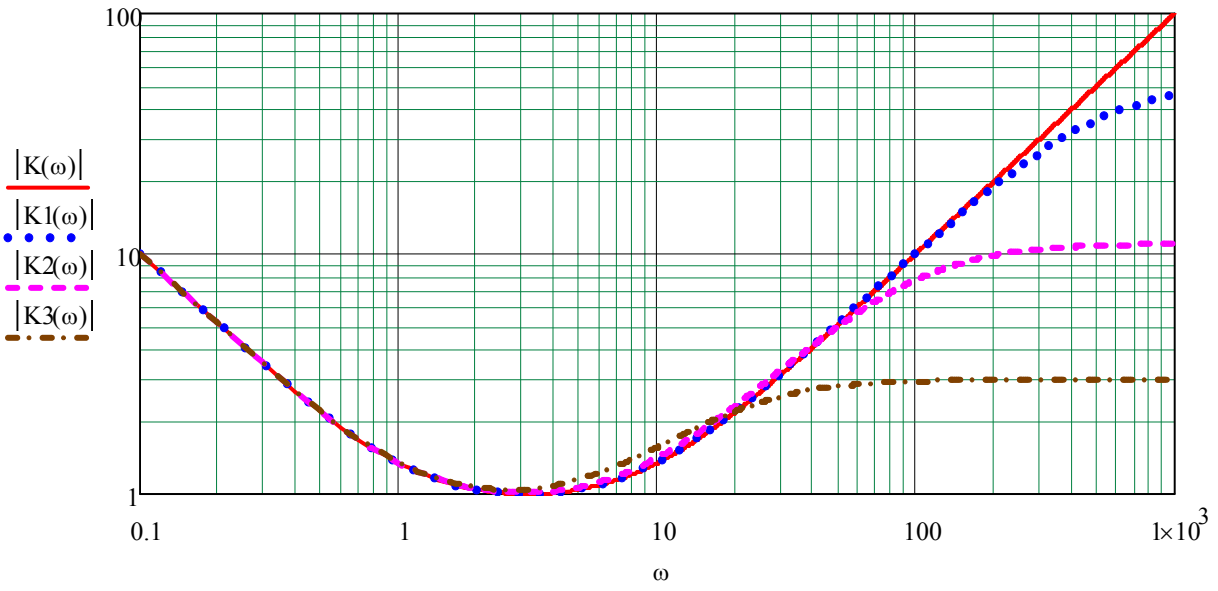


Charakterystyki częstotliwościowe regulatora PID-IND z rzeczywistym różniczkowaniem dla: Tc = 1, Tr = 1, kp = 2 i różnych wartości stałej czasowej bloku inercyjnego: T1 = 0.1, T1 = 0.2, T1 = 0.3, T1 = 0.4

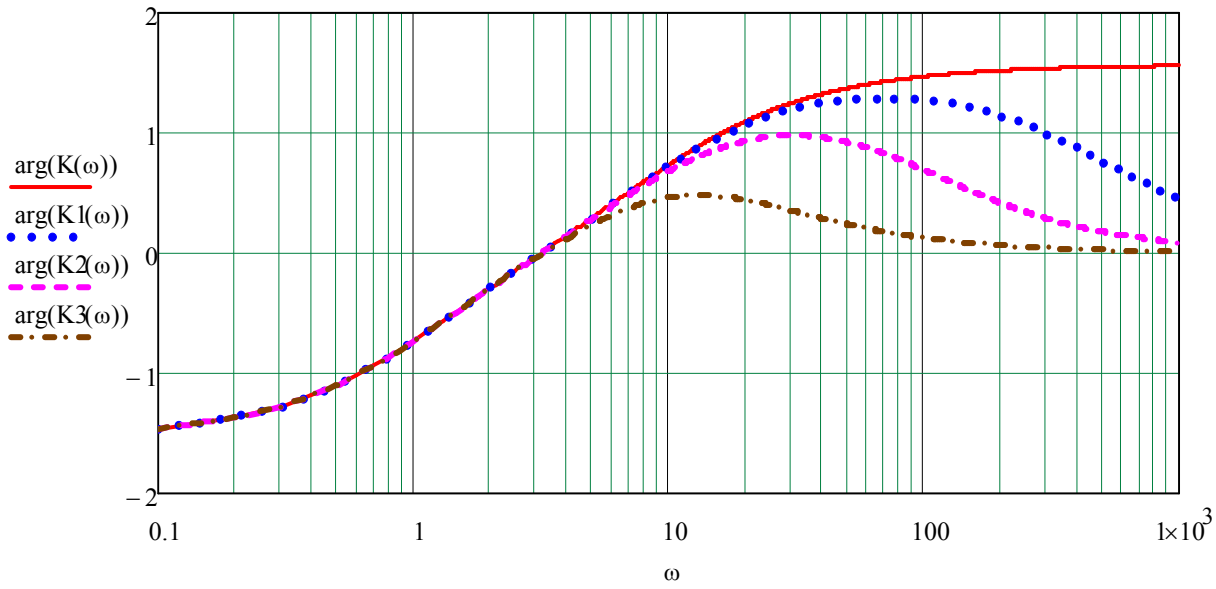
1.7.3. Charakterystyki amplitudowo-fazowe regulatorów PID-IND

Tabela 1.7.3.1.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki amplitudowo-fazowe regulatorów PID-IND: idealnego i z rzeczywistym różniczkowaniem dla różnych wartości stałej czasowej bloku inercyjnego $i := \sqrt{-1}$ $\quad \omega := 0.1, 0.2 .. 1000$ $Tc := 1 \quad Tr := 0.1 \quad kp := 1$ $K(\omega) := kp + \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc} + i\cdot\omega\cdot Tr$ $T1 := 0.002$ $K1(\omega) := kp + \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc} + \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{1 + i\cdot\omega\cdot T1}$ $T1 := 0.01$ $K2(\omega) := kp + \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc} + \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{1 + i\cdot\omega\cdot T1}$ $T1 := 0.05$ $K3(\omega) := kp + \frac{1}{i\cdot\omega\cdot Tc} + \frac{i\cdot\omega\cdot Tr}{1 + i\cdot\omega\cdot T1}$	Wykonaj czynności na podstawie przykładu, który jest przedstawiony w tabeli 1.3.3. *– określ krok obliczeń i przedział częstotliwości* *– wpisz podstawowe parametry regulatora* *– wpisz transmitancję K(ω) regulatora* *– określ wartość stałej czasowej T1 regulatora rzeczywistego* *– wpisz transmitancję K1(ω) regulatora rzeczywistego* *– utwórz dwa wykresy większej ilości wyrażeń* *– w pierwszym wykresie wprowadź na osi y moduły wyrażeń K(ω), K1(ω), K2(ω), K3(ω)* *– w drugim wykresie wprowadź na osi y argumenty wyrażeń K(ω), K1(ω), K2(ω), K3(ω)* *– wprowadź na osi x zmienną ω* *– wybierz logarytmiczne skale dla wykresu modułów transmitancji regulatorów* *– wybierz linie i punkty jako ślady wykresów* *– wybierz liniową skalę na osi y dla charakterystyki argumentu transmitancji regulatorów*



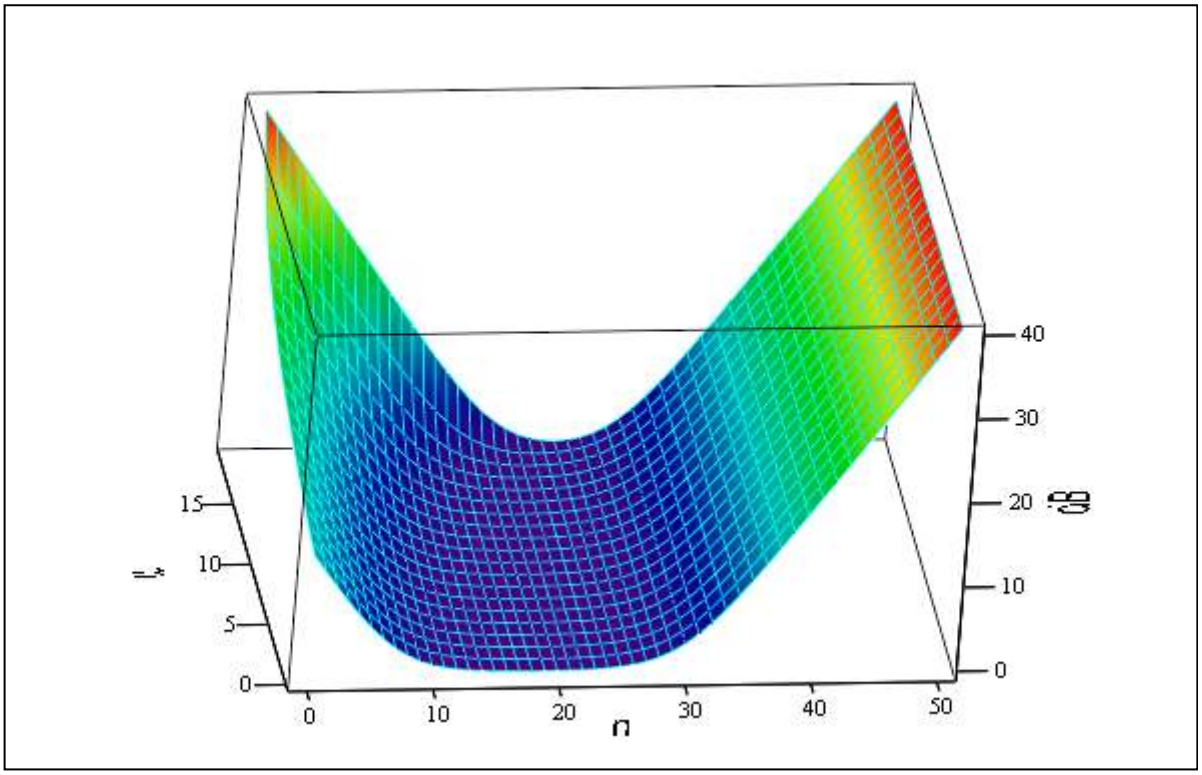
Charakterystyki amplitudowe regulatorów PID-IND: idealnego i z rzeczywistym różniczkowaniem dla:
Tc = 1, Tr = 0.1, kp = 1 i różnych wartości stałej czasowej bloku inercyjnego: T1 = 0.002, T1 = 0.01, T1 = 0.05



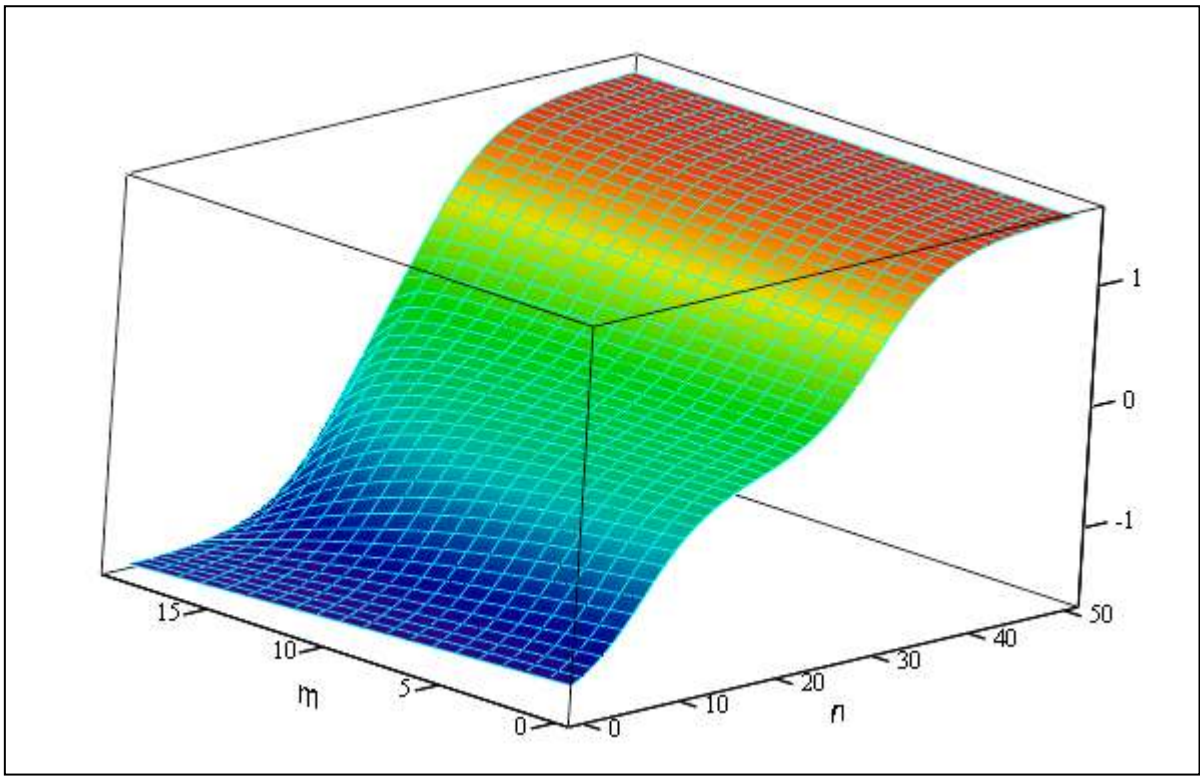
Charakterystyki fazowe regulatorów PID-IND: idealnego i z rzeczywistym różniczkowaniem dla: Tc = 1, Tr = 0.1, kp = 1 i różnych wartości stałej czasowej bloku inercyjnego: T1 = 0.002, T1 = 0.01, T1 = 0.05

Tabela 1.7.3.2.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych idealnego regulatora PID-IND dla zmieniającej się wartości stałej całkowania	Regulator PID idealnymi blokami funkcyjnymi.
$i := \sqrt{-1}$ $\quad Tr := 0.1$ $\quad kp := 1$	Stałe parametry regulatora.
$n := 0 .. 50$ $\quad m := 0 .. 19$	Parametry pomocnicze.
$\omega_n := 10^{\frac{n-20}{10}}$ $\quad Tc_m := 20 - m$	*Wektory zmiennych pomocniczych: ω, Tc* *– Zakres zmian częstotliwości* *ω ∈ (0.01, 1000)* *– Zakres zmian stałej całkowania* *Tc ∈ (20, 1)*
$Kid(\omega, Tc) := 20 \cdot \log\left(\left\|kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + i \cdot \omega \cdot Tr\right\|\right)$	Moduł transmitancji jako funkcja dwóch zmiennych.
$M_{n,m} := Kid(\omega_n, Tc_m)$	Macierz wartości modułu transmitancji.
$\varphi id(\omega, Tc) := \arg\left(kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + i \cdot \omega \cdot Tr\right)$	Argument transmitancji.
$\varphi_{n,m} := \varphi id(\omega_n, Tc_m)$	Macierz wartości argumentu transmitancji.
	Charakterystyki przedstawione są na rysunku 1.7.3.1.



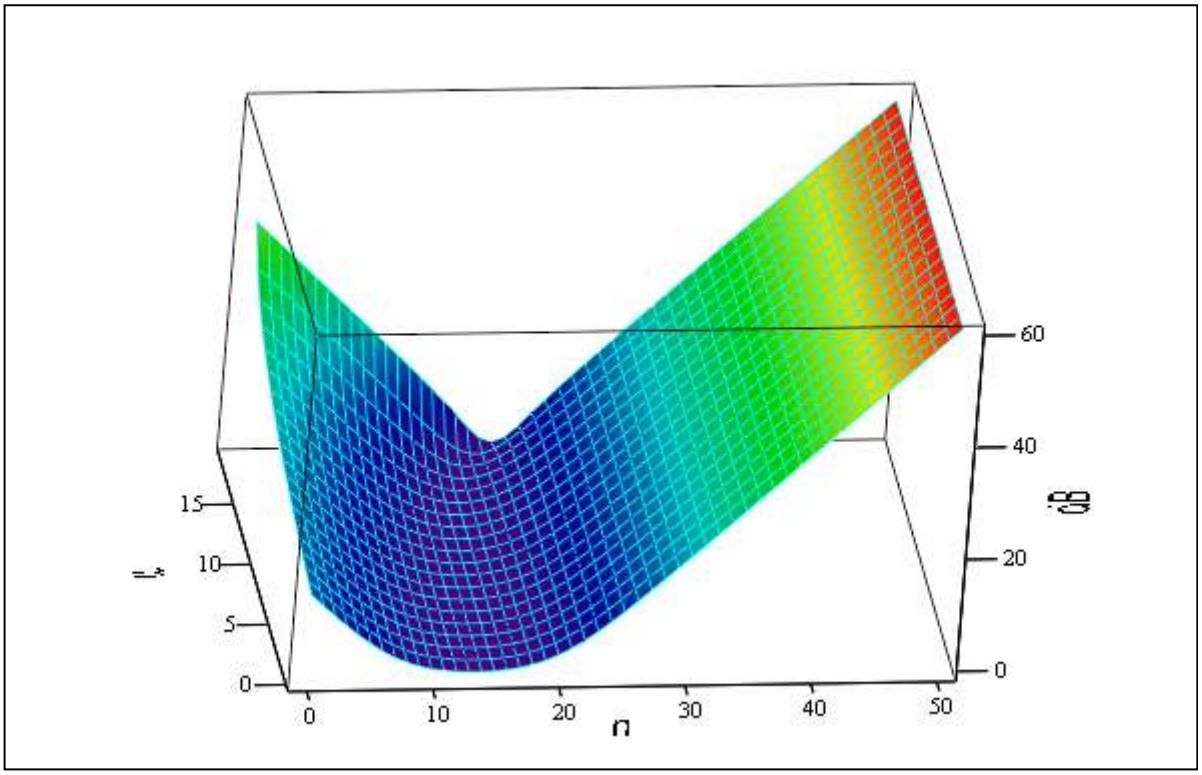
M



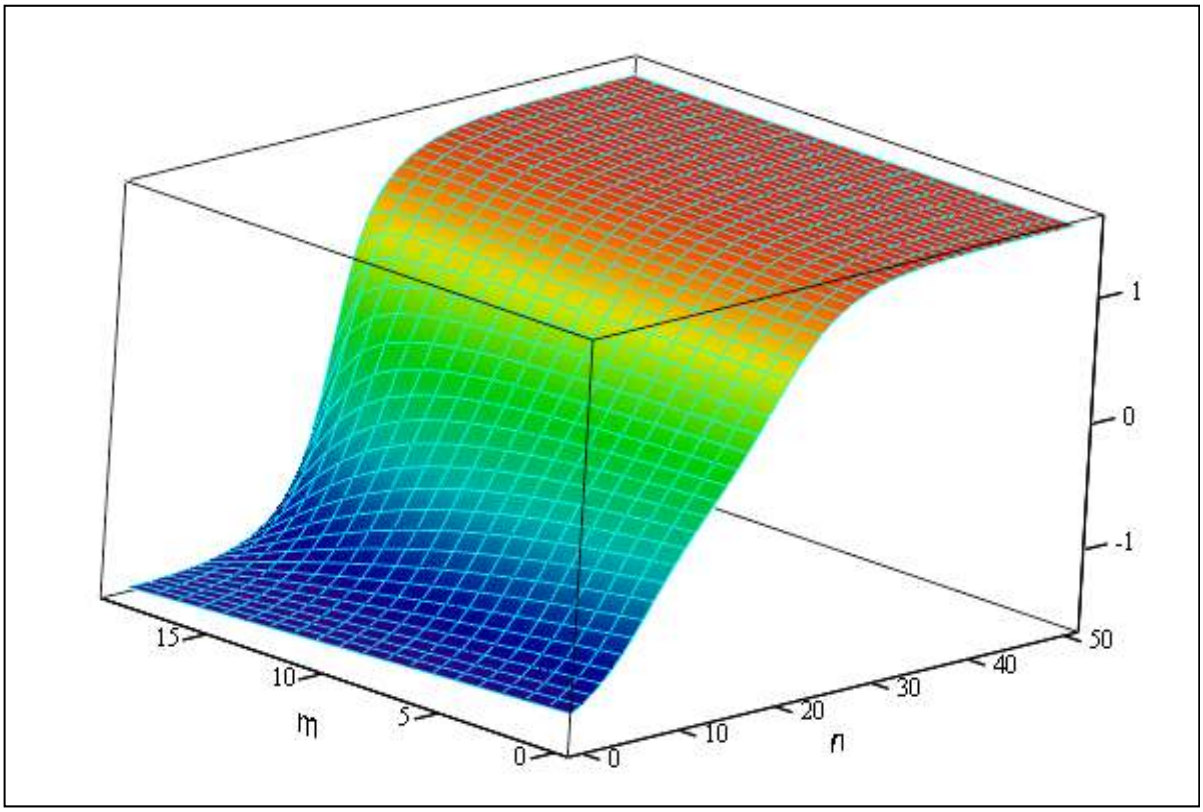
φ

Rys. 1.7.3.1a. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych idealnego regulatora PID-IND dla: kp = 1, Tr = 0.1 i zmieniającej się wartości stałej całkowania Tc ∈ (20, 1)

```
```



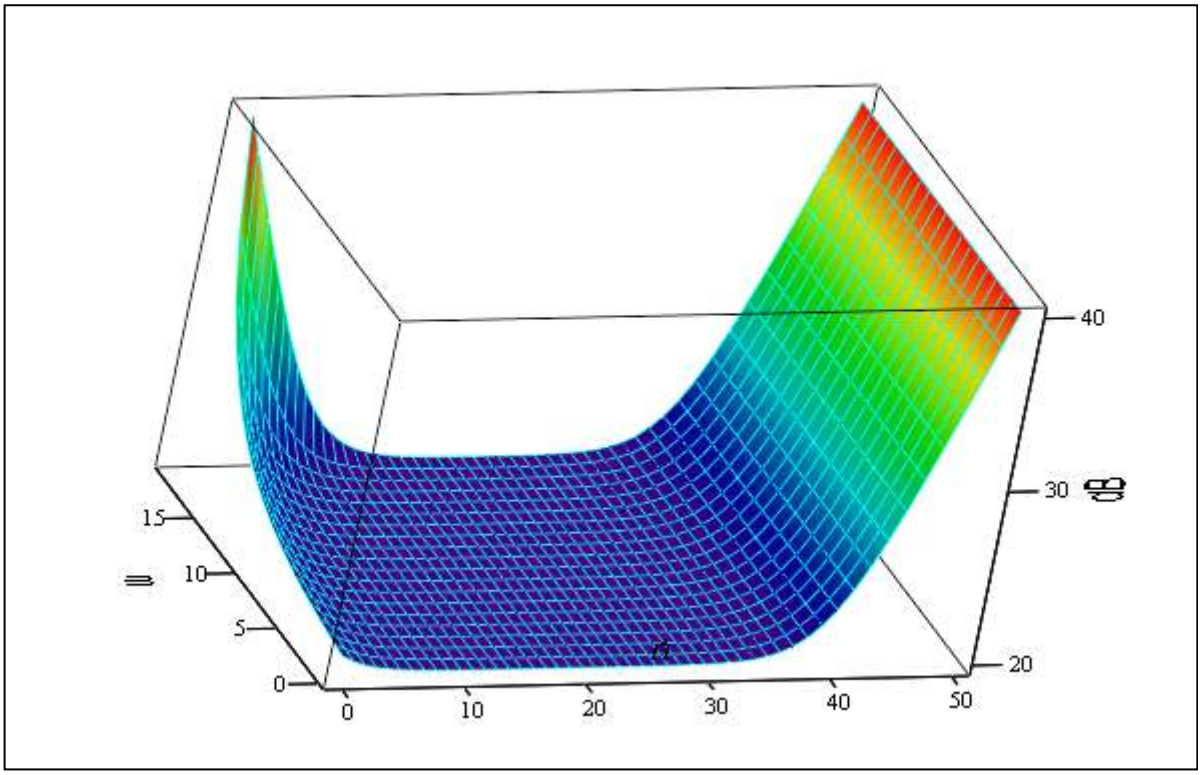
M



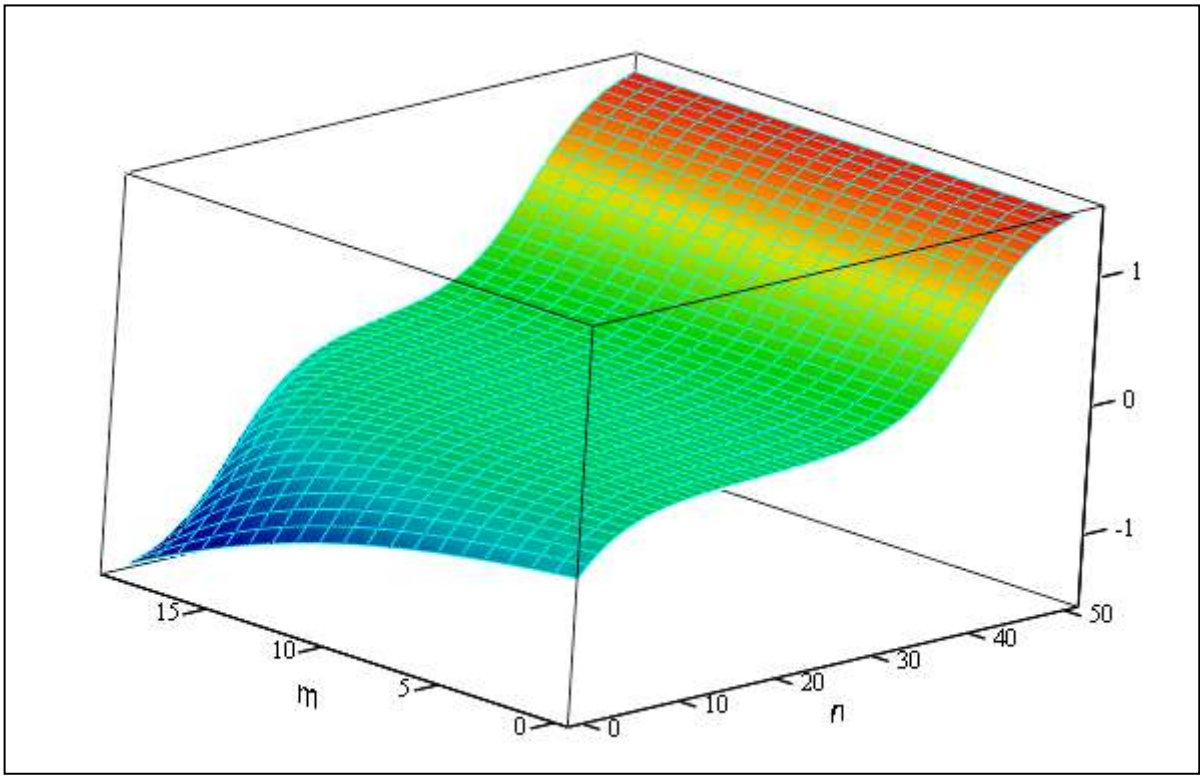
φ

Rys. 1.7.3.1b. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych idealnego regulatora PID-IND dla: kp = 1, Tr = 1 i zmieniającej się wartości stałej całkowania Tc ∈ (20, 1)

```
```



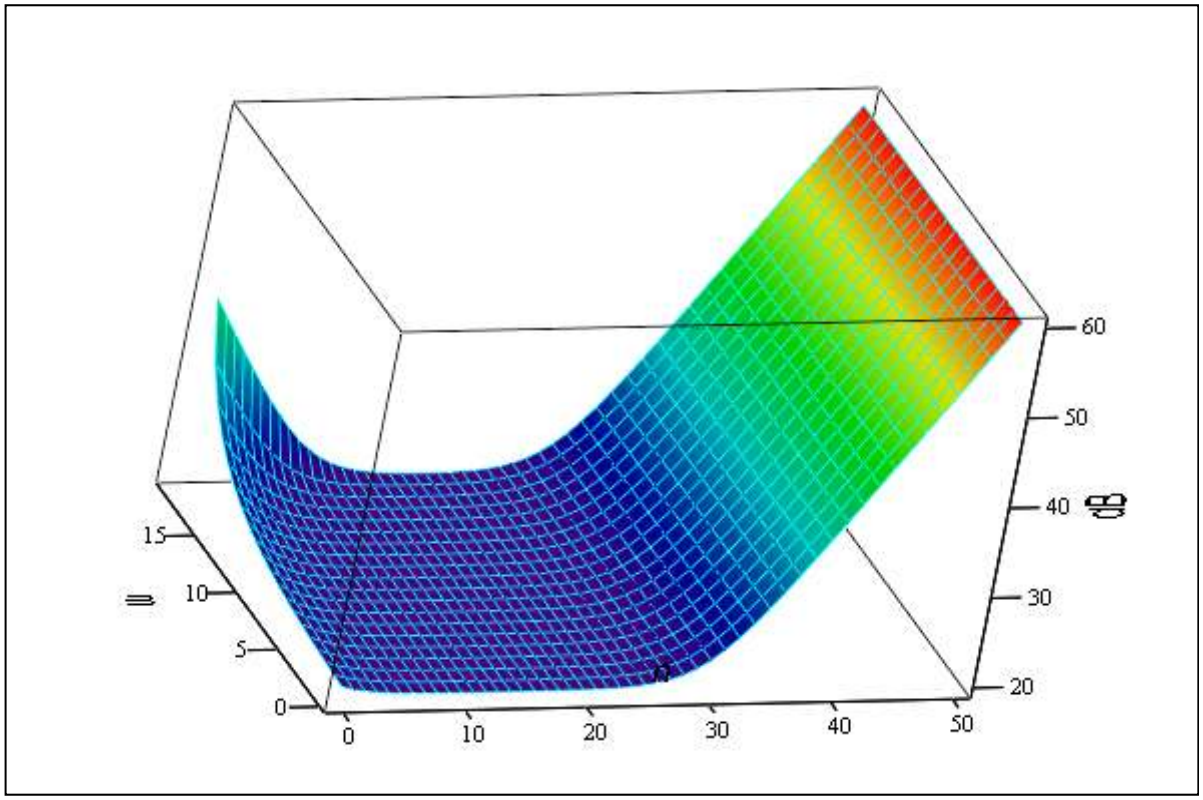
M



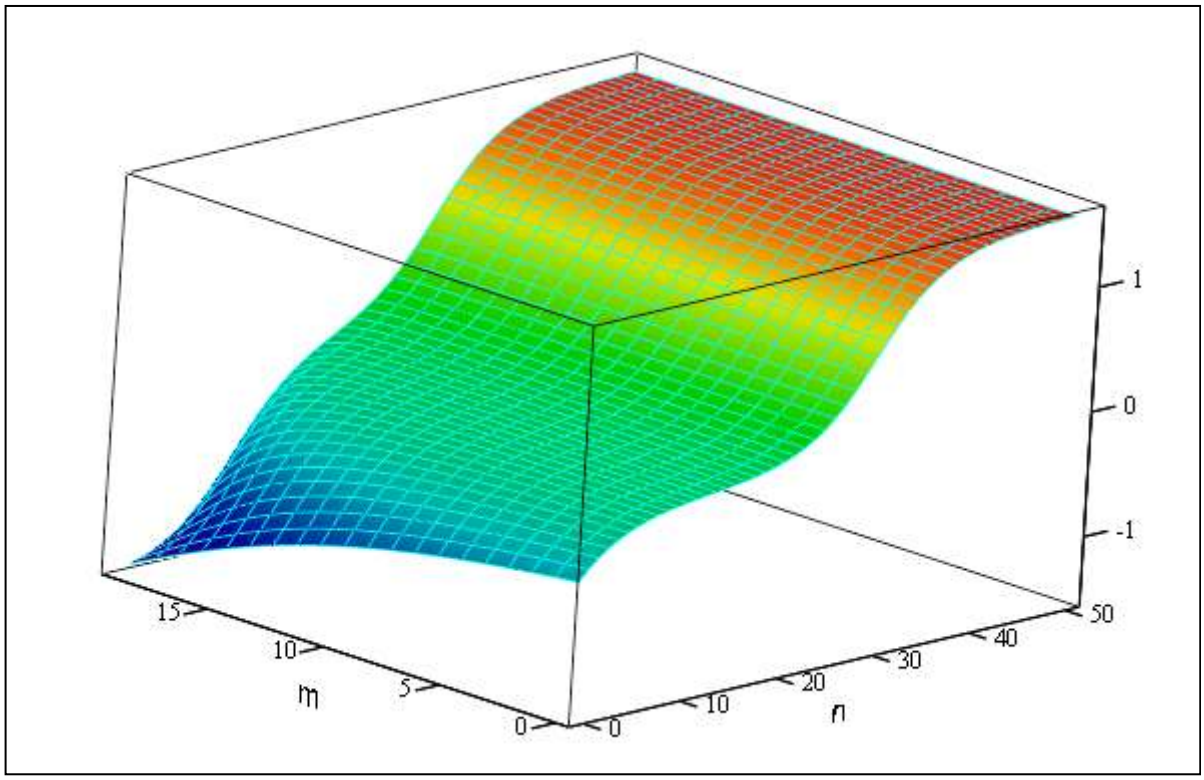
φ

Rys. 1.7.3.1c. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych idealnego regulatora PID-IND dla: kp = 10, Tr = 0.1 i zmieniającej się wartości stałej całkowania Tc ∈ (20, 1)

```
```



M



φ

Rys. 1.7.3.1d. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych idealnego regulatora PID-IND dla: kp = 10, Tr = 1 i zmieniającej się wartości stałej całkowania Tc ∈ (20, 1)

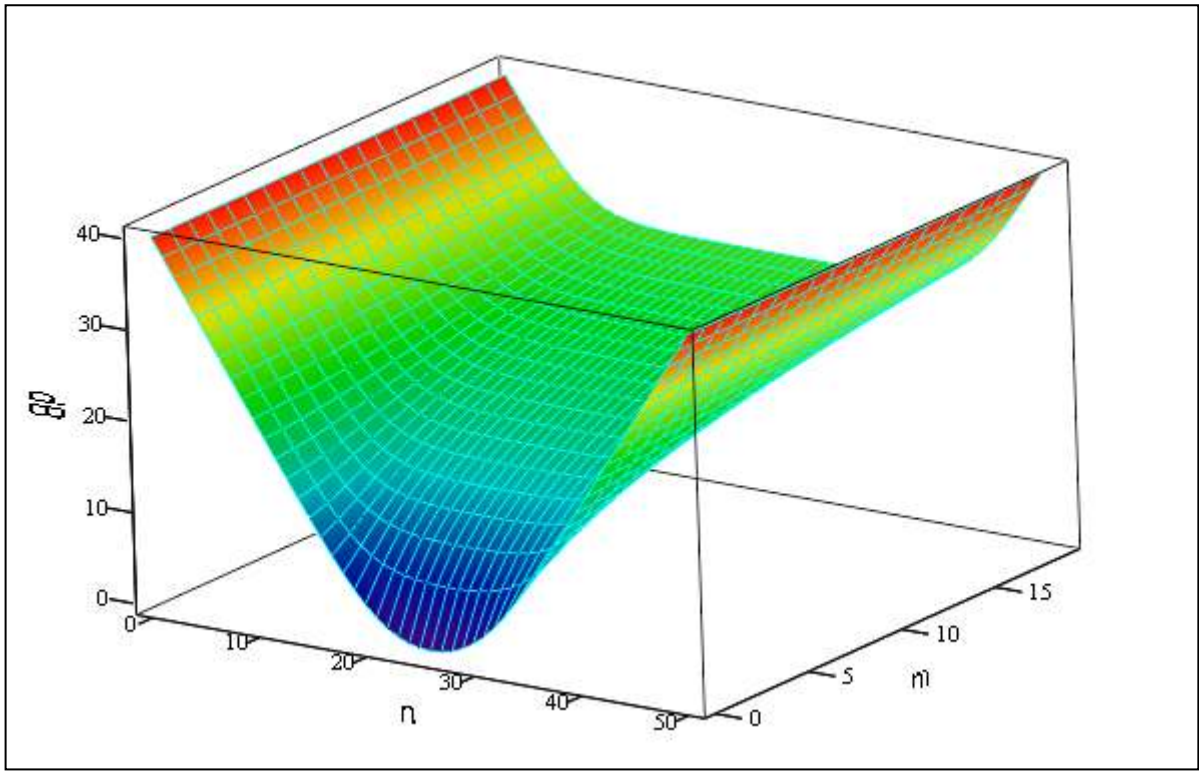
```
```

Tabela 1.7.3.3.

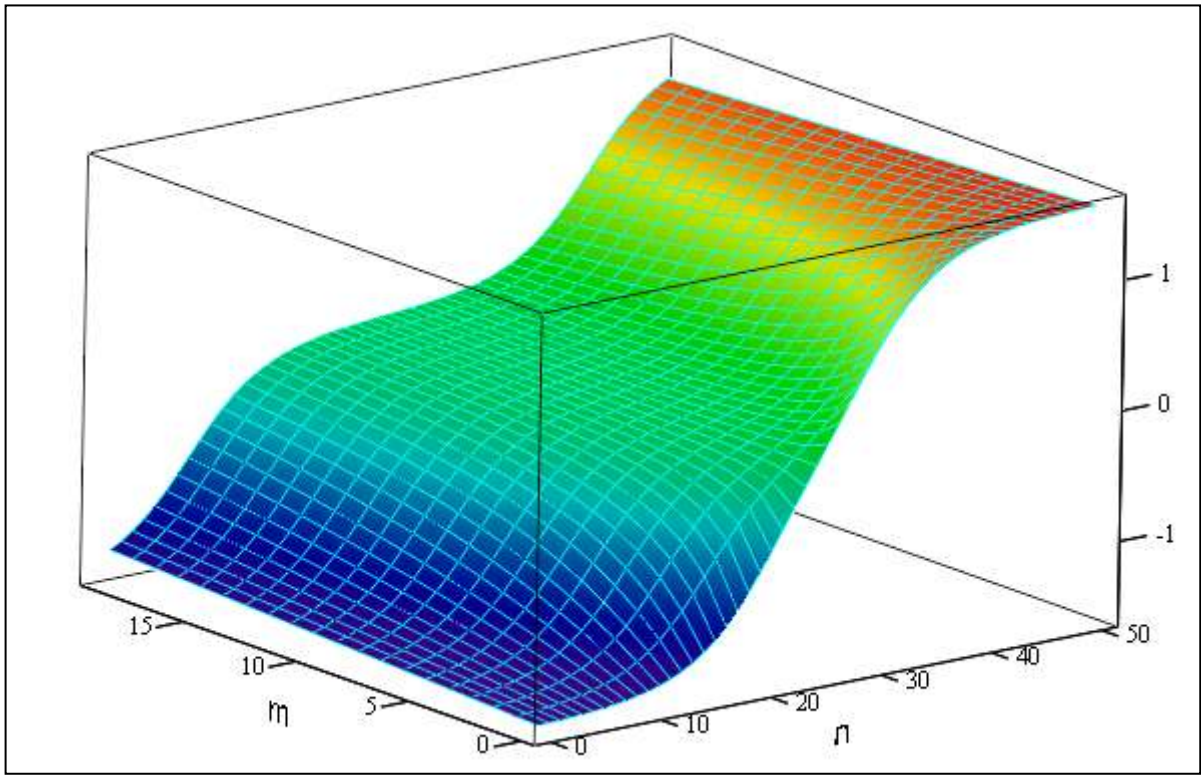
(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych idealnego regulatora PID-IND dla zmieniającej się wartości wzmocnienia $i := \sqrt{-1}$ $\quad Tr := 0.1$ $\quad Tc := 1$ $n := 0 .. 50$ $\quad m := 0 .. 19$ $\omega_n := 10^{\frac{n-20}{10}}$ $\quad kp_m := 1 + m$ $Kid(\omega, kp) := 20 \cdot \log\left(\left\| kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + i \cdot \omega \cdot Tr \right\|\right)$ $M_{n,m} := Kid(\omega_n, kp_m)$ $\varphi id(\omega, kp) := \arg\left(kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + i \cdot \omega \cdot Tr\right)$ $\varphi_{n,m} := \varphi id(\omega_n, kp_m)$	Regulator PID idealnymi blokami funkcyjnymi. Stałe i pomocnicze parametry regulatora. *Wektory zmiennych pomocniczych: ω, kp* *– Zakres zmian częstotliwości* *$\omega \in (0.01, 1000)$* *– Zakres zmian wzmocnienia* *kp $\in$ (1, 20)* Moduł transmitancji jako funkcja dwóch zmiennych. Macierz wartości modułu transmitancji. Argument transmitancji. Macierz wartości argumentu transmitancji.

Tabela 1.7.3.4.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych idealnego regulatora PID-IND dla zmieniającej się wartości stałej różniczkowania $i := \sqrt{-1}$ $\quad Tc := 10$ $\quad kp := 1$ $n := 0 .. 50$ $\quad m := 0 .. 19$ $\omega_n := 10^{\frac{n-20}{10}}$ $\quad Tr_m := 2 - 0.1 m$ $Kid(\omega, Tr) := 20 \cdot \log\left(\left\| kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + i \cdot \omega \cdot Tr \right\|\right)$ $M_{n,m} := Kid(\omega_n, Tr_m)$ $\varphi id(\omega, Tr) := \arg\left(kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + i \cdot \omega \cdot Tr\right)$ $\varphi_{n,m} := \varphi id(\omega_n, Tr_m)$	Regulator PID idealnymi blokami funkcyjnymi. Stałe parametry regulatora. Parametry pomocnicze. *Wektory zmiennych pomocniczych: ω, Tr* *– Zakres zmian częstotliwości* *$\omega \in (0.01, 1000)$* *– Zakres zmian stałej różniczkowania* *Tr $\in$ (2, 0.1)* Moduł transmitancji jako funkcja dwóch zmiennych. Macierz wartości modułu transmitancji. Argument transmitancji. Macierz wartości argumentu transmitancji.



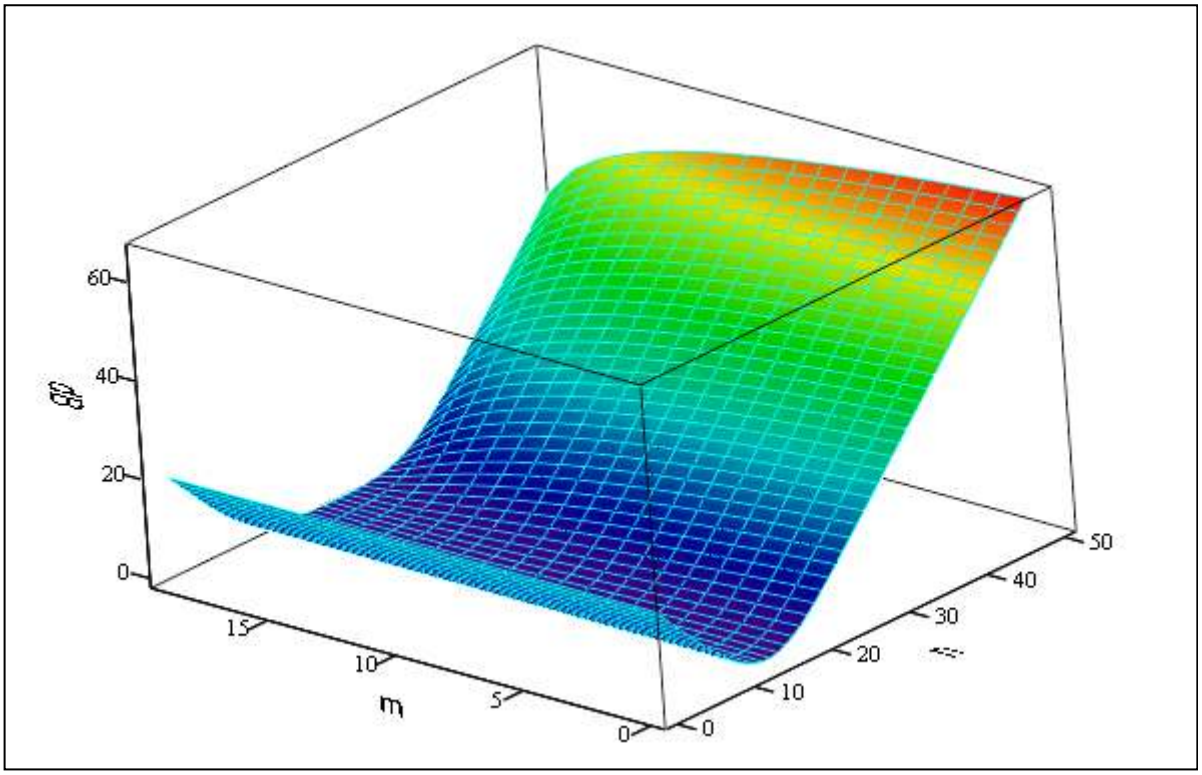
M



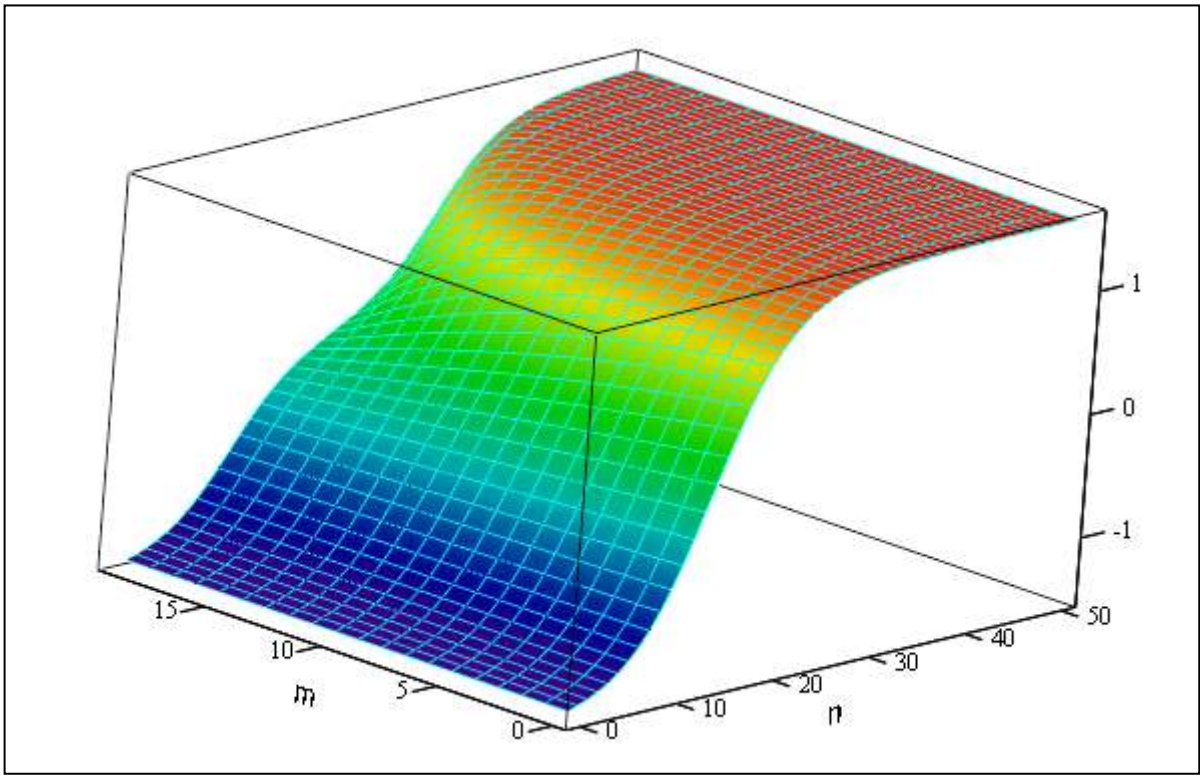
φ

Rys. 1.7.3.2. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych idealnego regulatora PID-IND dla: Tc = 1, Tr = 0.1 i zmieniającej się wartości wzmocnienia kp ∈ (1, 20)

```
```



M



φ

Rys. 1.7.3.3. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych idealnego regulatora PID-IND dla: Tc = 10, kp = 1 i zmieniającej się wartości stałej różniczkowania Tr ∈ (2, 0.1)

```
```

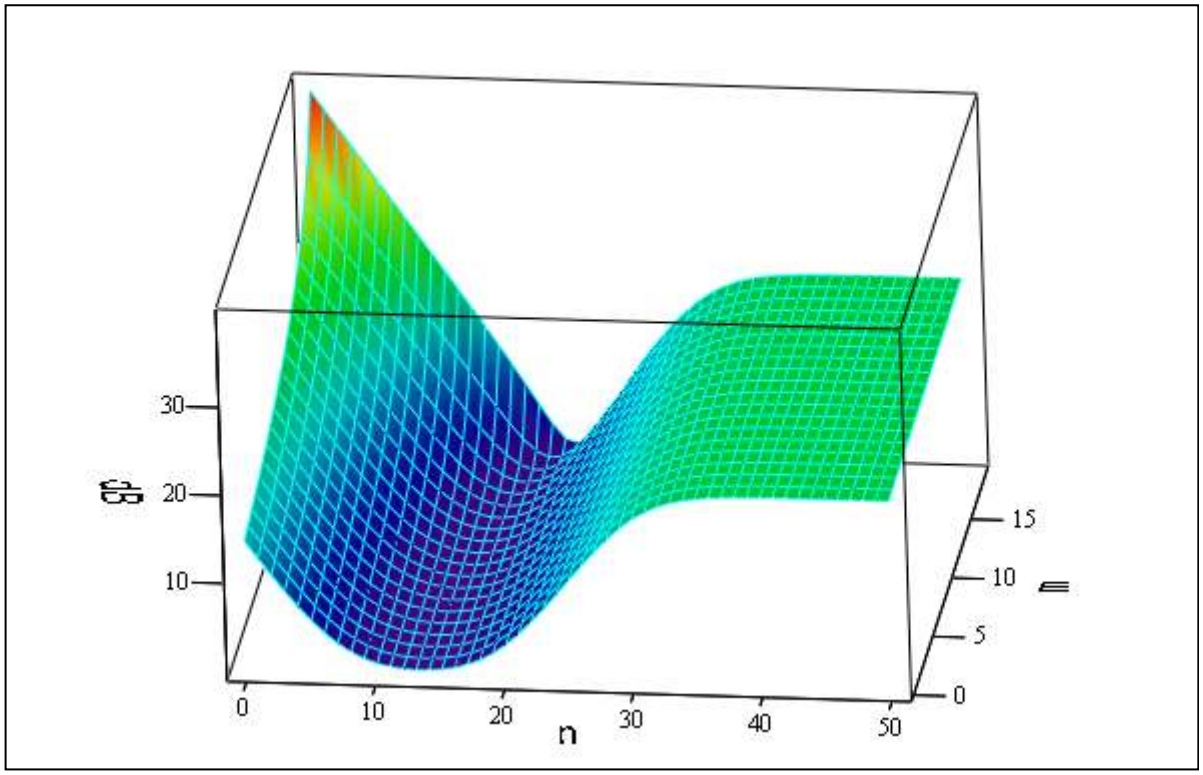
1.7.4. Charakterystyki amplitudowo-fazowe regulatora PID-IND z różniczkowaniem rzeczywistym

Tabela 1.7.4.1.

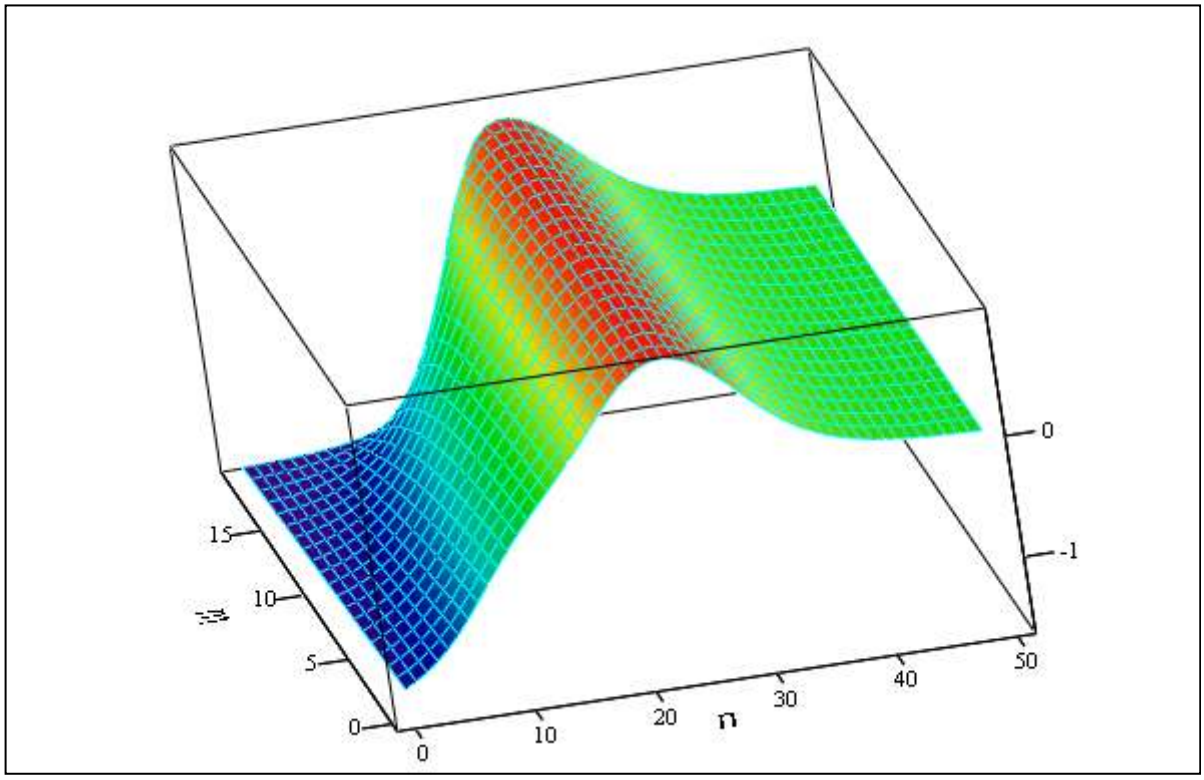
(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PID-IND z różniczkowaniem rzeczywistym dla zmieniającej się wartości stałej całkowania $i := \sqrt{-1}$ $kp := 1$ $Tr := 1$ $T1 := 0.1$ $n := 0 .. 50$ $m := 0 .. 19$ $\omega_n := 10^{\frac{n-20}{10}}$ $Tc_m := 20 - m$ $Kr(\omega, Tc) := 20 \cdot \log\left[\left| kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + \frac{i \cdot \omega \cdot Tr}{1 + i \cdot \omega \cdot T1} \right|\right]$ $M_{n,m} := Kr(\omega_n, Tc_m)$ $\varphi r(\omega, Tc) := \arg\left[kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + \frac{i \cdot \omega \cdot Tr}{1 + i \cdot \omega \cdot T1}\right]$ $\varphi_{n,m} := \varphi r(\omega_n, Tc_m)$	Algorytm PID z różniczkowaniem rzeczywistym. Stała czasowa inercji T1 = 0.1· Tr Stałe parametry regulatora. Parametry pomocnicze. *Wektory zmiennych pomocniczych: ω, Tc* *- Zakres zmian częstotliwości* *ω ∈ (0.01, 1000)* *- Zakres zmian stałej całkowania* *Tc ∈ (20, 1)* Moduł transmitancji jako funkcja dwóch zmiennych. Macierz wartości modułu transmitancji. Argument transmitancji. Macierz argumentu transmitancji. *Charakterystyki przedstawione są na rysunku 3.7.4.1.*

Tabela 3.7.4.2.

(okno robocze programu Mathcad) - w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PID-IND z różniczkowaniem rzeczywistym dla zmieniającej się wartości stałej różniczkowania. $i := \sqrt{-1}$ $kp := 1$ $Tc := 10$ $T1 := 0.1$ $n := 0 .. 50$ $m := 0 .. 19$ $\omega_n := 10^{\frac{n-20}{10}}$ $Tr_m := 0.1 + 0.1 \cdot m$ $Kr(\omega, Tr) := 20 \cdot \log\left[\left| kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + \frac{i \cdot \omega \cdot Tr}{1 + i \cdot \omega \cdot T1} \right|\right]$ $M_{n,m} := Kr(\omega_n, Tr_m)$ $\varphi r(\omega, Tr) := \arg\left[kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + \frac{i \cdot \omega \cdot Tr}{1 + i \cdot \omega \cdot T1}\right]$ $\varphi_{n,m} := \varphi r(\omega_n, Tr_m)$	Algorytm PID z różniczkowaniem rzeczywistym. Stałe parametry regulatora. Parametry pomocnicze. *Wektory zmiennych pomocniczych: ω, Tr* *– Zakres zmian częstotliwości* *ω ∈ (0.01, 1000)* *– Zakres zmian stałej różniczkowania* *Tr ∈ (0.1, 2)* Moduł transmitancji jako funkcja dwóch zmiennych. Macierz wartości modułu transmitancji. Argument transmitancji. Macierz argumentu transmitancji. *Charakterystyki przedstawione są na rysunku 1.7.4.2.*



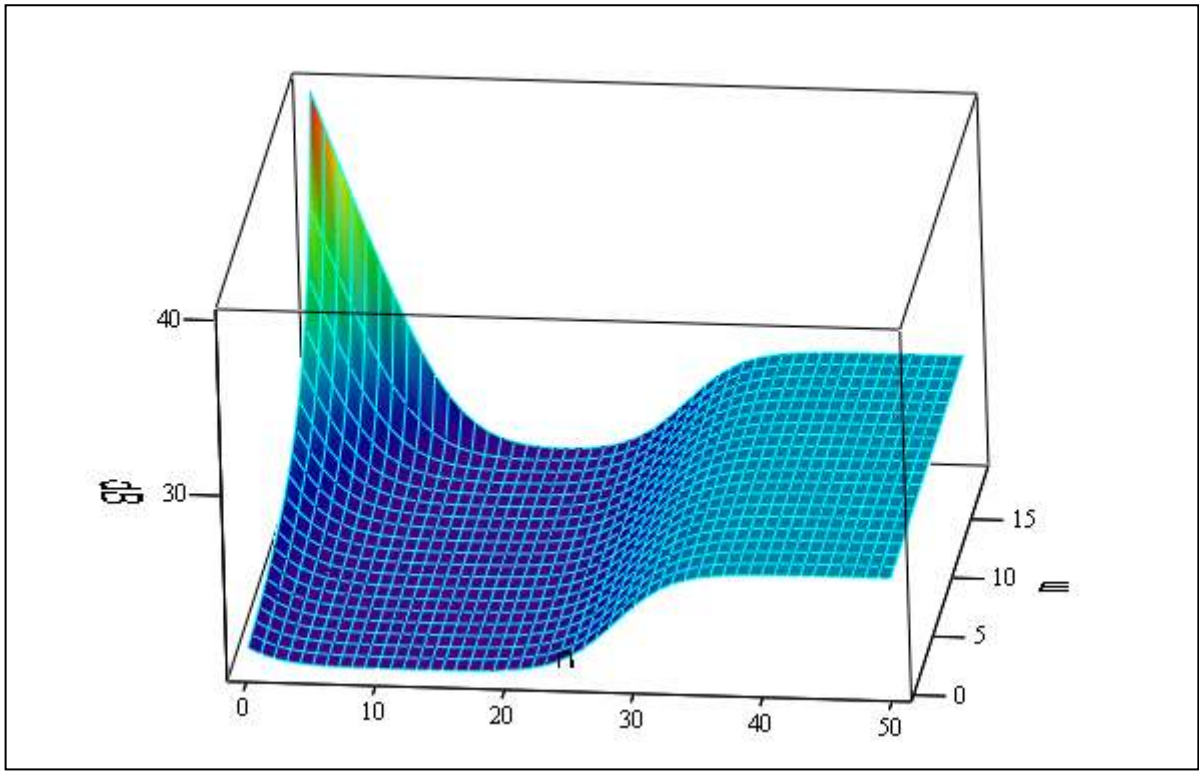
M



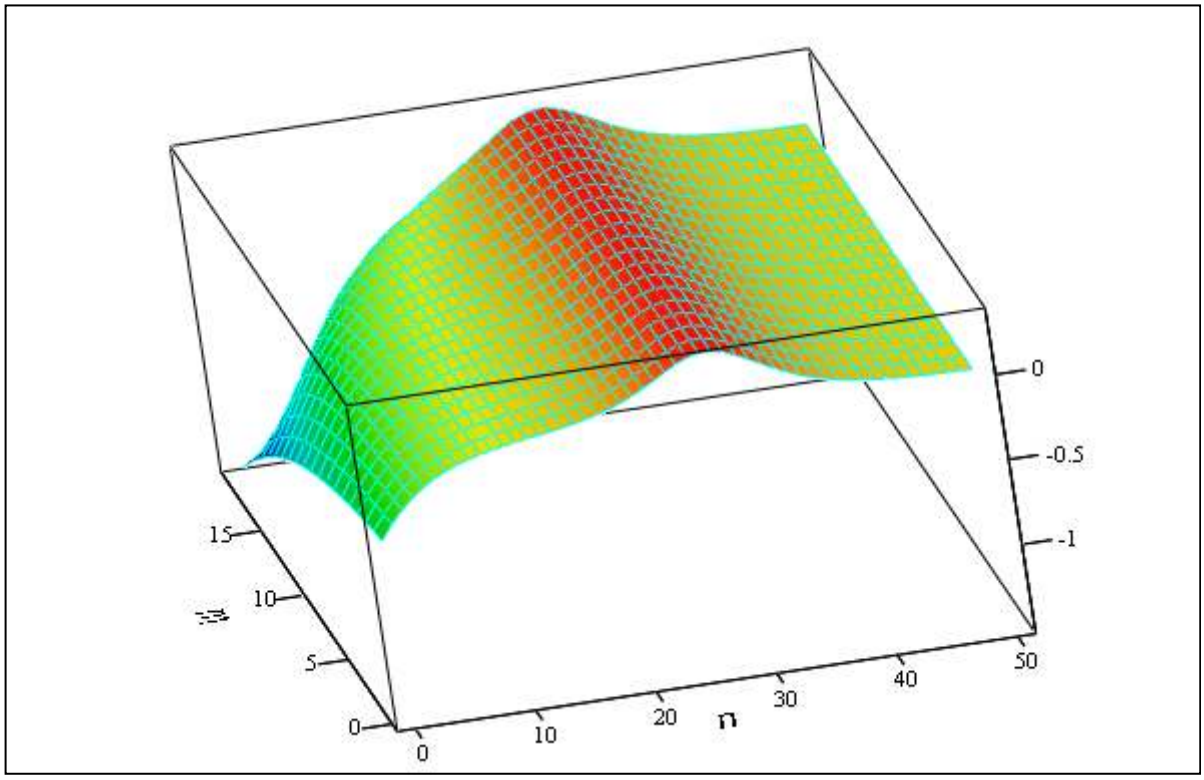
φ

Rys. 1.7.4.1a. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PID-IND z różniczkowaniem rzeczywistym dla: kp = 1, Tr = 1, T1 = 0.1 i zmieniającej się wartości stałej całkowania Tc ∈ (20, 1)

```
```

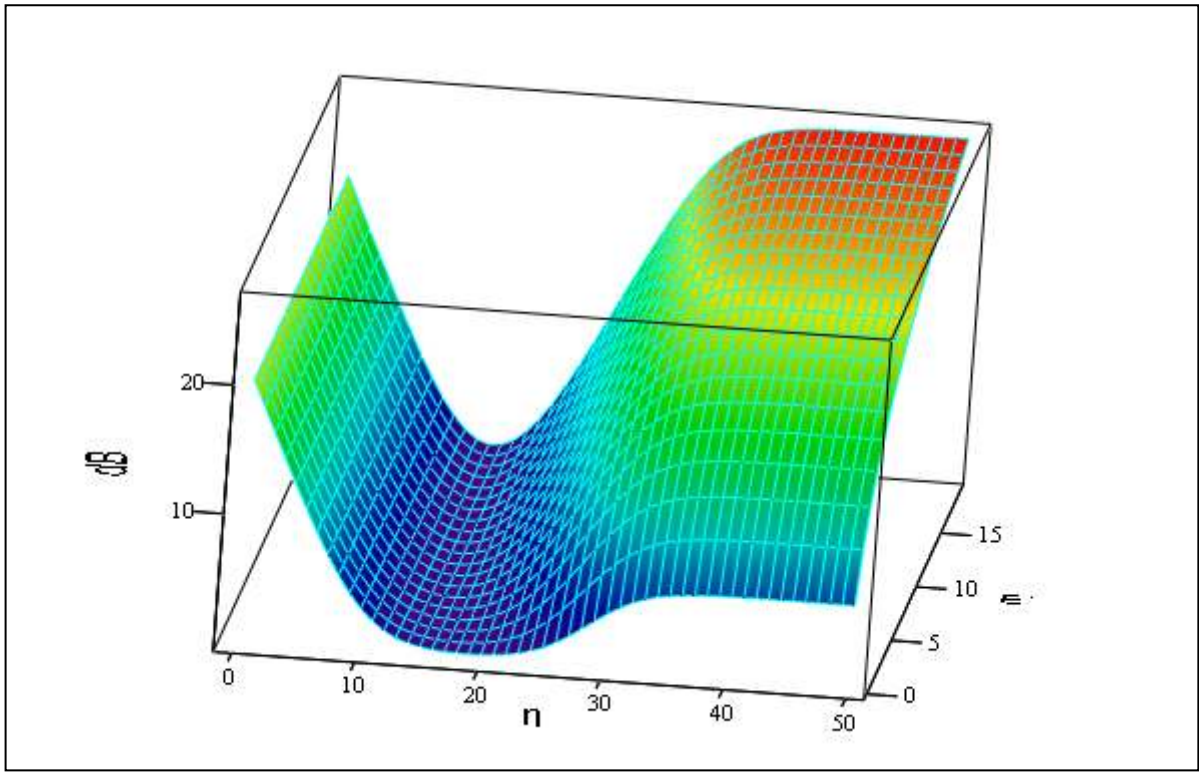


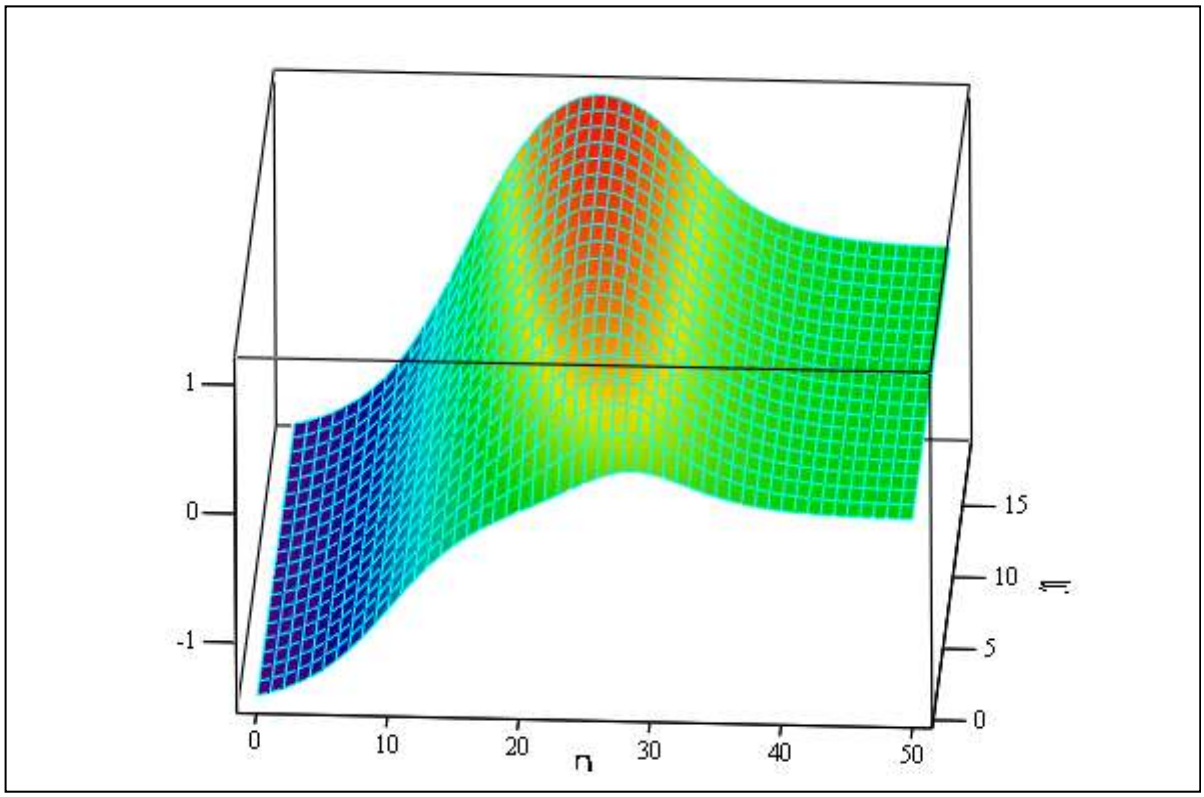
M



φ

Rys. 1.7.4.1b. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PID–IND z różniczkowaniem rzeczywistym dla: kp = 10, Tr = 1, T1 = 0.1 i zmieniającej się wartości stałej całkowania Tc ∈ (20, 1)





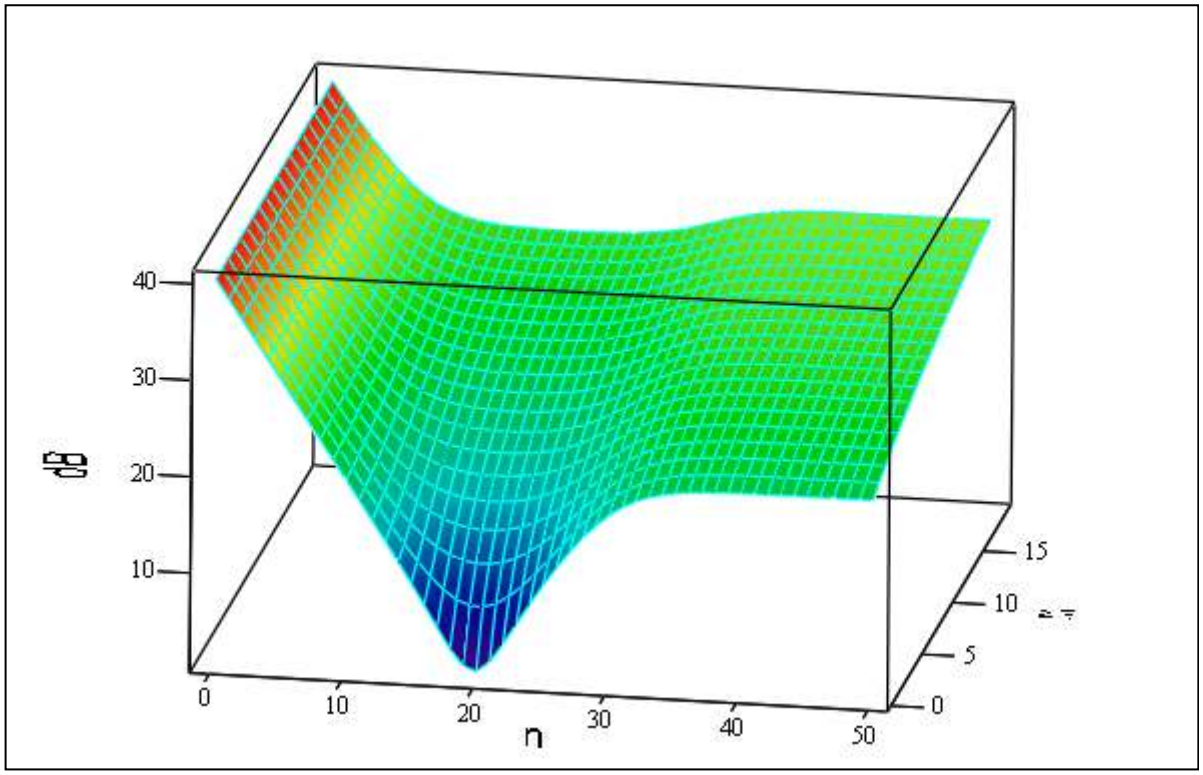
Rys. 1.7.4.2. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PID-IND z różniczkowaniem rzeczywistym dla: kp = 1, Tc = 10, T1 = 0.1 i zmieniającej się wartości stałej różniczkowania Tr ∈ (0.1, 2)

Tabela 1.7.4.3.

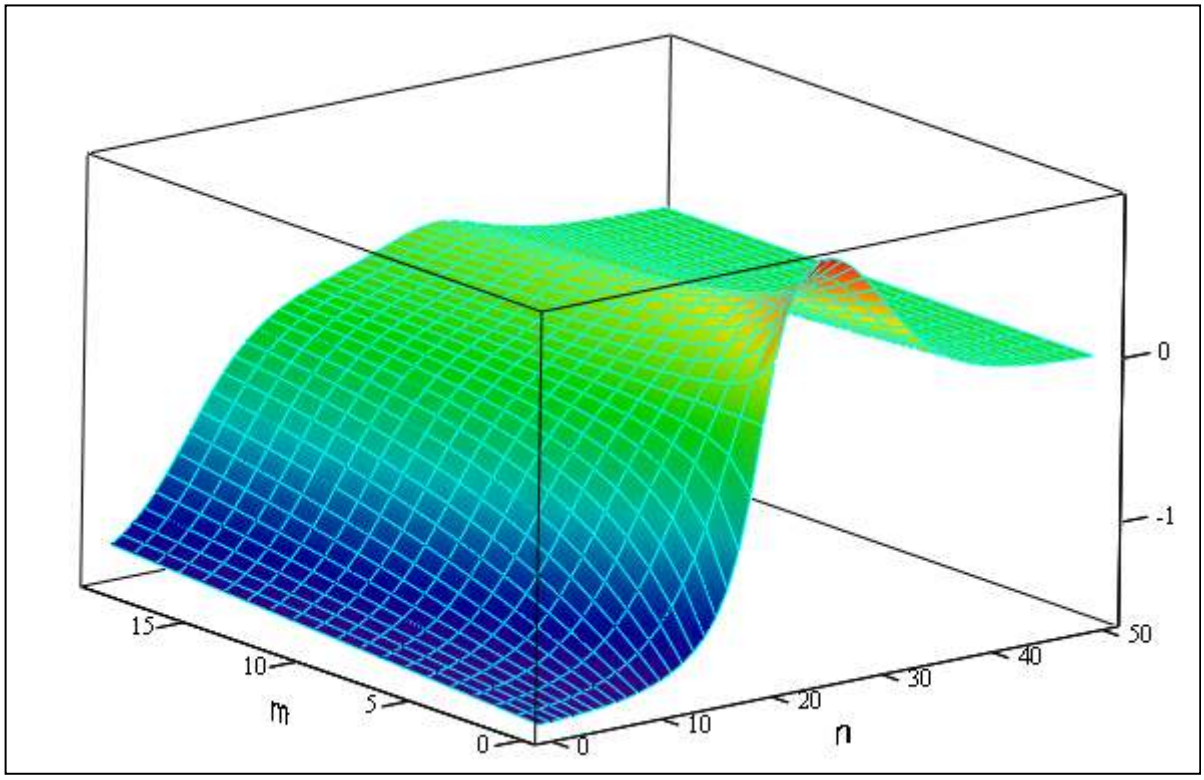
(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PID-IND z różniczkowaniem rzeczywistym i zmieniającej się wartości wzmocnienia $i := \sqrt{-1} \quad kp := 1 \quad Tr := 1 \quad T1 := 0.1$ $n := 0..50 \quad m := 0..19$ $\omega_n := 10^{\frac{n-20}{10}} \quad kp_m := 1 + m$ $Kr(\omega, kp) := 20 \cdot \log\left(\left\| kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + \frac{i \cdot \omega \cdot Tr}{1 + i \cdot \omega \cdot T1} \right\|\right)$ $M_{n,m} := Kr(\omega_n, kp_m)$ $\varphi r(\omega, kp) := \arg\left[kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + \frac{i \cdot \omega \cdot Tr}{1 + i \cdot \omega \cdot T1}\right]$ $\varphi_{n,m} := \varphi r(\omega_n, kp_m)$	Algorytm PID z różniczkowaniem rzeczywistym Stała czasowa inercji T1 = 0.1· Tr Stałe parametry regulatora. Parametry pomocnicze. *Wektory zmiennych pomocniczych: ω, kp* *– Zakres zmian częstotliwości* *$\omega \in (0.01, 1000)$* *– Zakres zmian wzmocnienia* *$kp \in (1, 20)$* Moduł transmitancji jako funkcja dwóch zmiennych. Macierz wartości modułu transmitancji. Argument transmitancji. Macierz argumentu transmitancji. *Charakterystyki przedstawione są na rysunku 1.7.4.3.*

Tabela 3.7.4.4.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PID-IND z różniczkowaniem rzeczywistym i zmieniającej się wartości stałej czasowej bloku inercyjnego $i := \sqrt{-1} \quad kp := 1 \quad Tc := 10 \quad Tr := 1$ $n := 0..50 \quad m := 0..19$ $\omega_n := 10^{\frac{n-20}{10}} \quad T1_m := 2 - 0.1\,m$ $Kr(\omega, T1) := 20 \cdot \log\left(\left\| kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + \frac{i \cdot \omega \cdot Tr}{1 + i \cdot \omega \cdot T1} \right\|\right)$ $M_{n,m} := Kr(\omega_n, T1_m)$ $\varphi r(\omega, T1) := \arg\left[kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} + \frac{i \cdot \omega \cdot Tr}{1 + i \cdot \omega \cdot T1}\right]$ $\varphi_{n,m} := \varphi r(\omega_n, T1_m)$	Algorytm PID z różniczkowaniem rzeczywistym Stałe parametry regulatora. Parametry pomocnicze. *Wektory zmiennych pomocniczych: ω, T1* *– Zakres zmian częstotliwości* *$\omega \in (0.01, 1000)$* *– Zakres zmian stałej czasowej inercji* *$T1 \in (0.1, 2)$* Moduł transmitancji jako funkcja dwóch zmiennych. Macierz wartości modułu transmitancji. Argument transmitancji. Macierz argumentu transmitancji. *Charakterystyki przedstawione są na rysunku 1.7.4.4.*



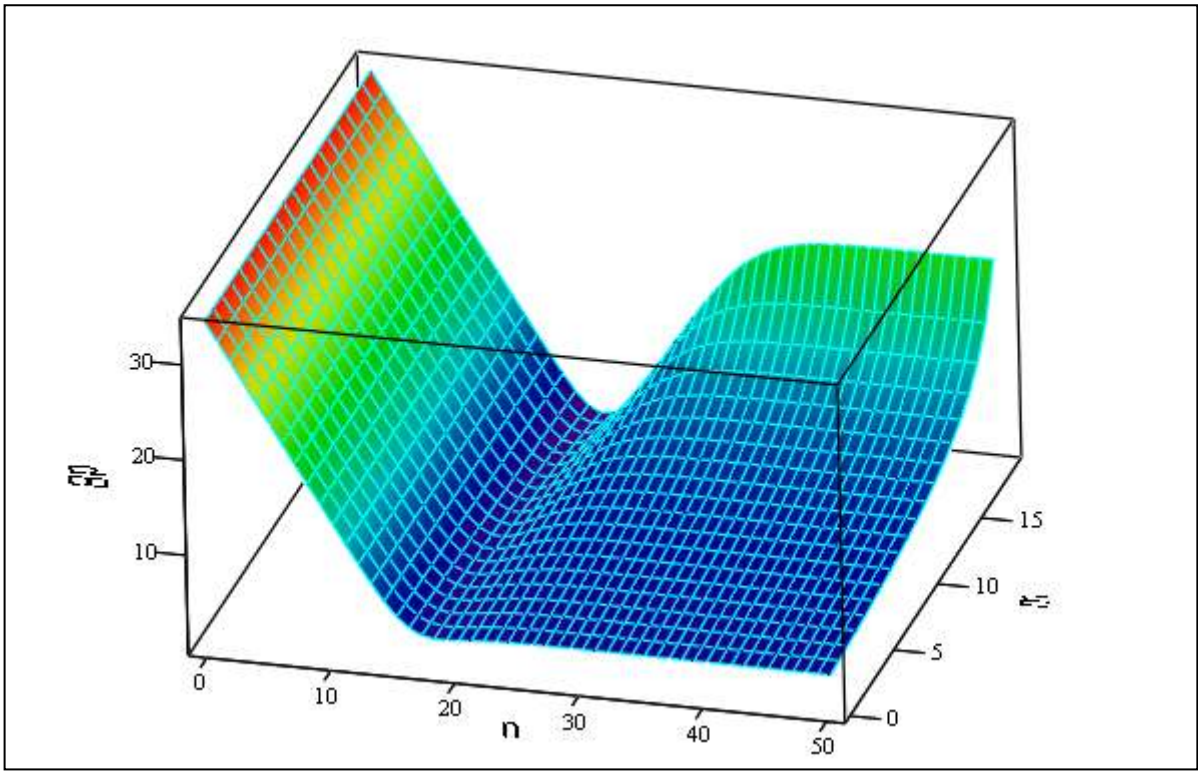
M



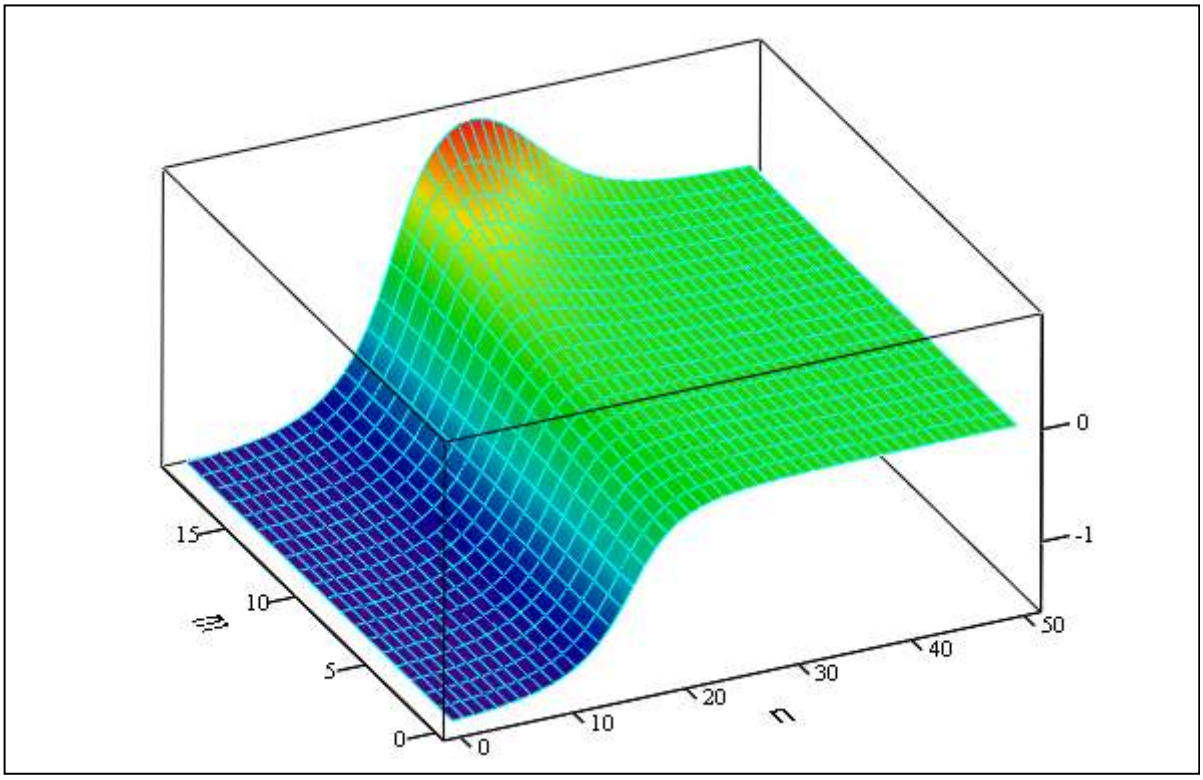
φ

Rys. 1.7.4.3. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PID-IND z różniczkowaniem rzeczywistym dla: Tc = 1, Tr = 1, T1 = 0.1 i zmieniającej się wartości wzmocnienia regulatora kp ∈ (1, 20)

```
```



M



φ

Rys. 1.7.4.4. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PID-IND z różniczkowaniem rzeczywistym dla: Tc = 1, Tr = 1, kp = 1 i zmieniającej się wartości stałej czasowej bloku inercyjnego T1 ∈ (2, 0.1)

```
```

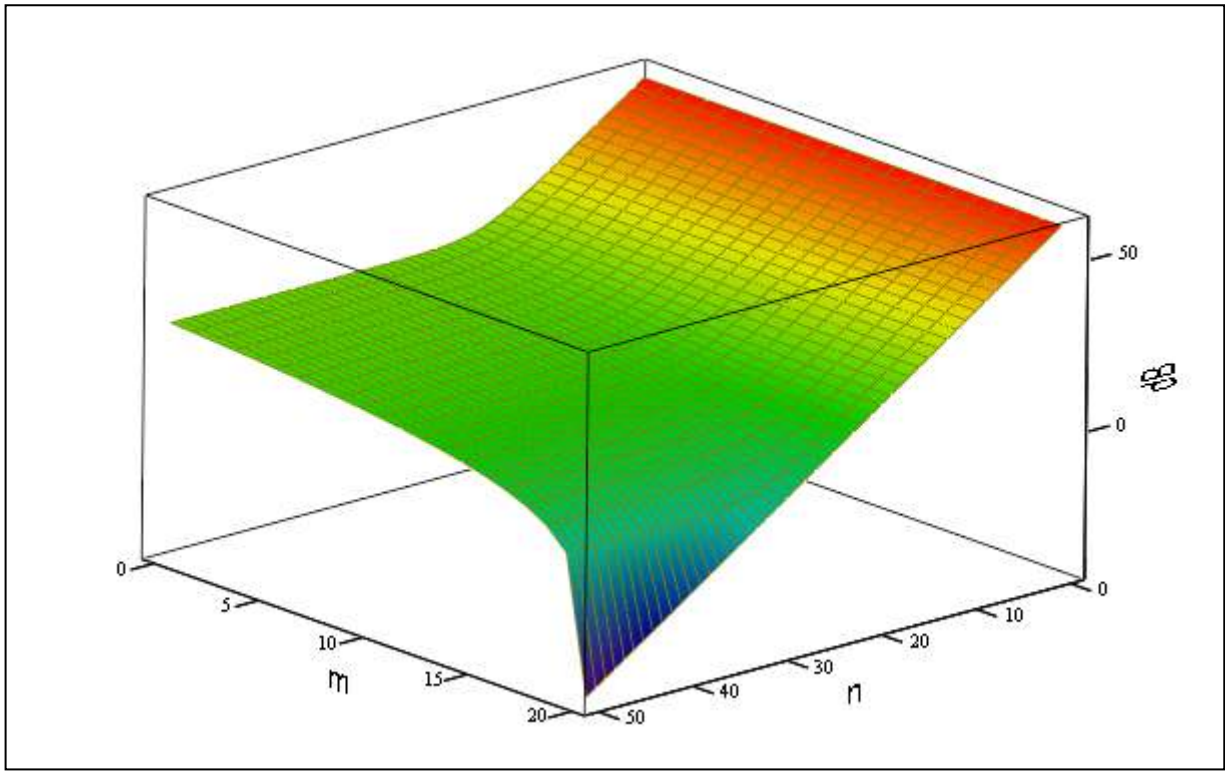
1.7.5. Charakterystyki amplitudowo-fazowe regulatora PI

Tabela 1.7.5.1.

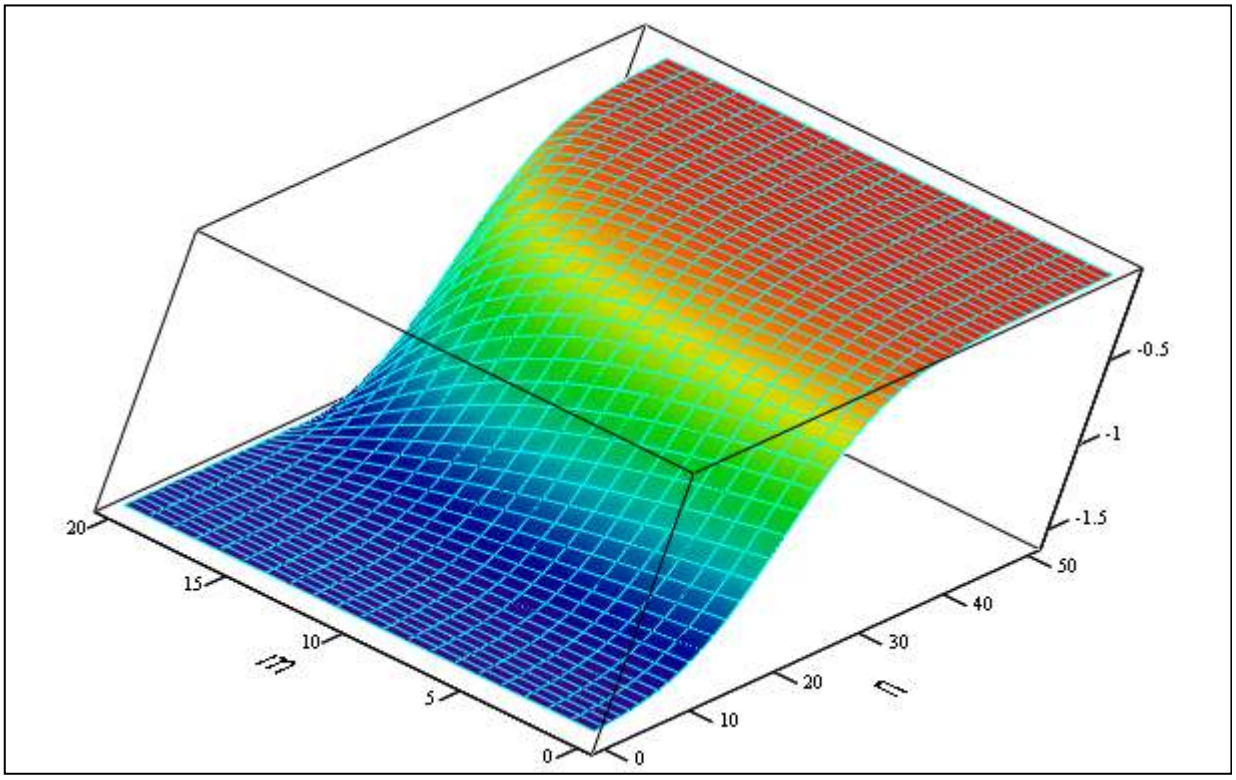
(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PI – badanie wpływu zmian wzmocnienia	Regulator PI z idealnymi blokami funkcyjnymi
$i := \sqrt{-1}$ $\quad Tc := 0.1$	Stałe parametry regulatora. Parametry pomocnicze.
$n := 0 .. 50$ $\quad m := 0 .. 19$	*Wektory zmiennych pomocniczych: ω, kp*
$\omega_n := 10^{\frac{n-20}{10}}$ $\quad kp_m := 20 - m$	*– Zakres zmian częstotliwości* $\omega \in (0.01, 1000)$ *– Zakres zmian wzmocnienia* $kp \in (20, 1)$
$Kid(\omega, kp) := 20 \cdot \log\left(\left\| kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc}\right\|\right)$	Moduł transmitancji jako funkcja dwóch zmiennych.
$M_{n,m} := Kid(\omega_n, kp_m)$	Macierz wartości modułu transmitancji.
$\varphi id(\omega, kp) := \arg\left(kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc}\right)$	Argument transmitancji.
$\varphi_{n,m} := \varphi id(\omega_n, kp_m)$	Macierz wartości argumentu transmitancji.

Tabela 1.7.5.2.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PI – badanie wpływu zmian wzmocnienia	Regulator PI z rzeczywistym całkowaniem
$i := \sqrt{-1}$ $\quad Tc := 1$ $\quad T1 := 0.1$	Stałe parametry regulatora. Parametry pomocnicze.
$n := 0 .. 50$ $\quad m := 0 .. 19$	*Wektory zmiennych pomocniczych: ω, kp*
$\omega_n := 10^{\frac{n-20}{10}}$ $\quad kp_m := 20 - m$	*– Zakres zmian częstotliwości* $\omega \in (0.01, 1000)$ *– Zakres zmian wzmocnienia* $kp \in (20, 1)$
$Kr(\omega, T1) := 20 \cdot \log\left[\left\| kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} \cdot \frac{1}{1 + i \cdot \omega \cdot T1}\right\|\right]$	Moduł transmitancji jako funkcja dwóch zmiennych.
$\varphi r(\omega, T1) := \arg\left[kp + \frac{1}{i \cdot \omega \cdot Tc} \cdot \frac{1}{1 + i \cdot \omega \cdot T1}\right]$	Argument transmitancji.
$M_{n,m} := Kid(\omega_n, kp_m)$	Macierz wartości modułu transmitancji.
$\varphi_{n,m} := \varphi id(\omega_n, kp_m)$	Macierz argumentu transmitancji.



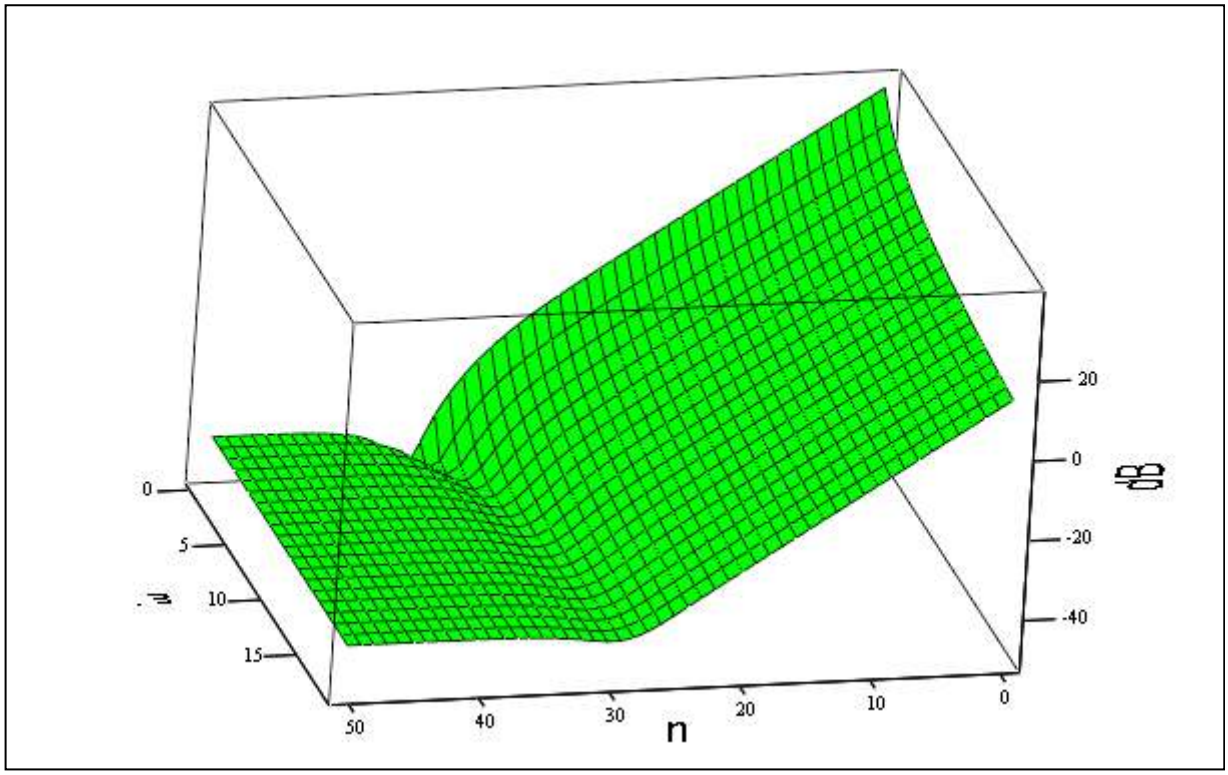
M



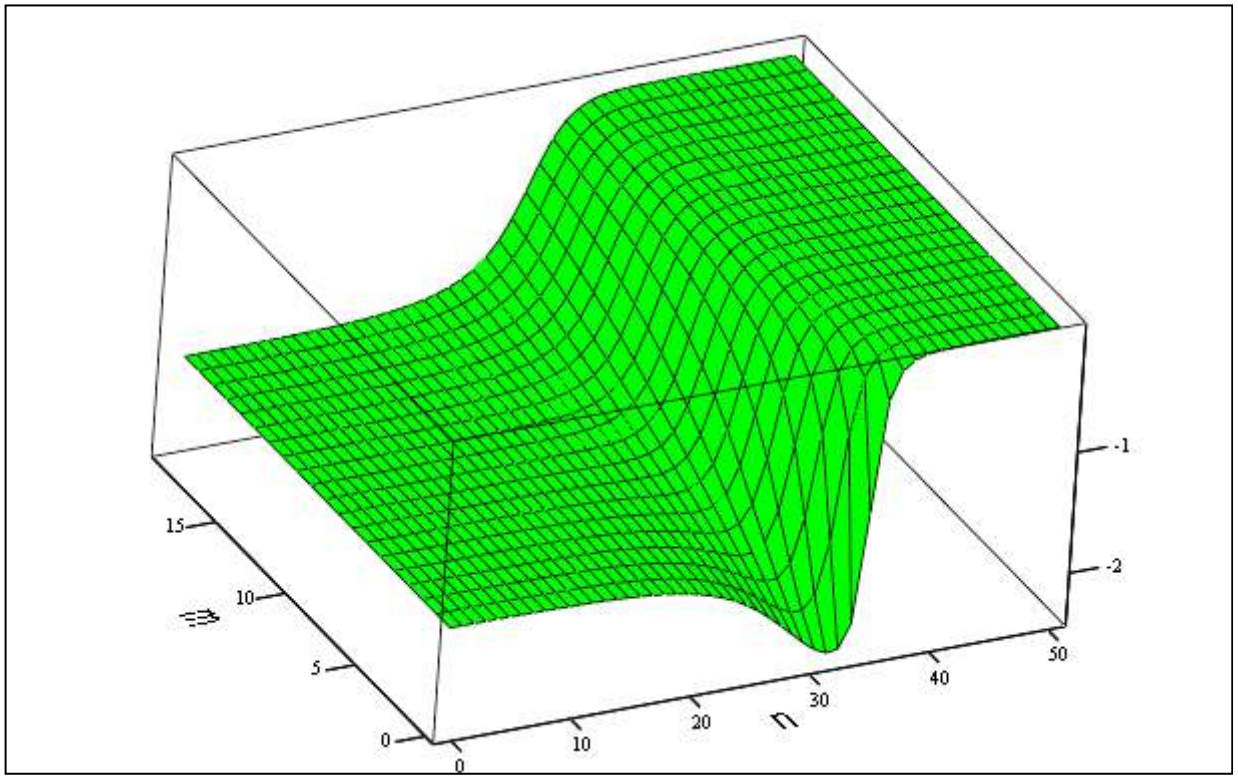
φ

Rys. 1.7.5.1. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych idealnego regulatora PI dla: kp ∈ (1, 20), Tc = 0,1

```
```



M



φ

Rys. 1.7.5.2. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych rzeczywistego regulatora PI dla: kp ∈ (0, 20), T1 = 0.1, Tc = 1

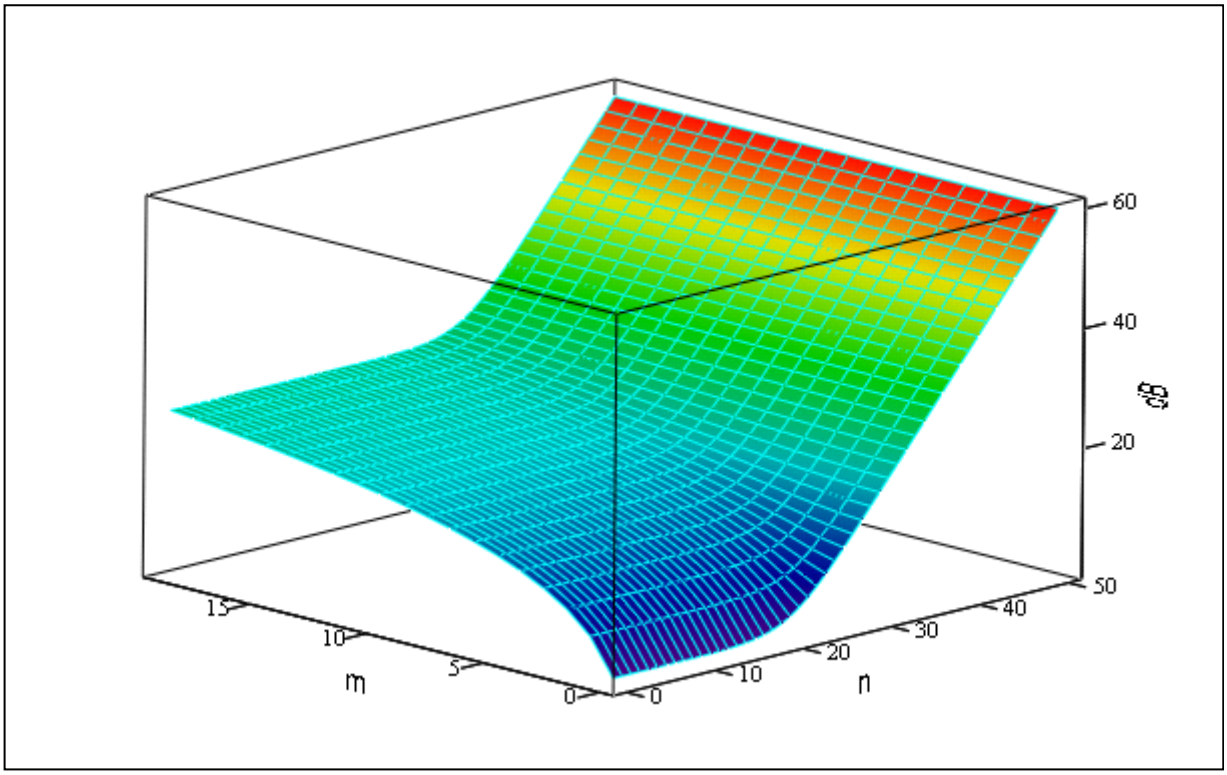
1.7.6. Charakterystyki amplitudowo-fazowe regulatora PD

Tabela 1.7.6.1.

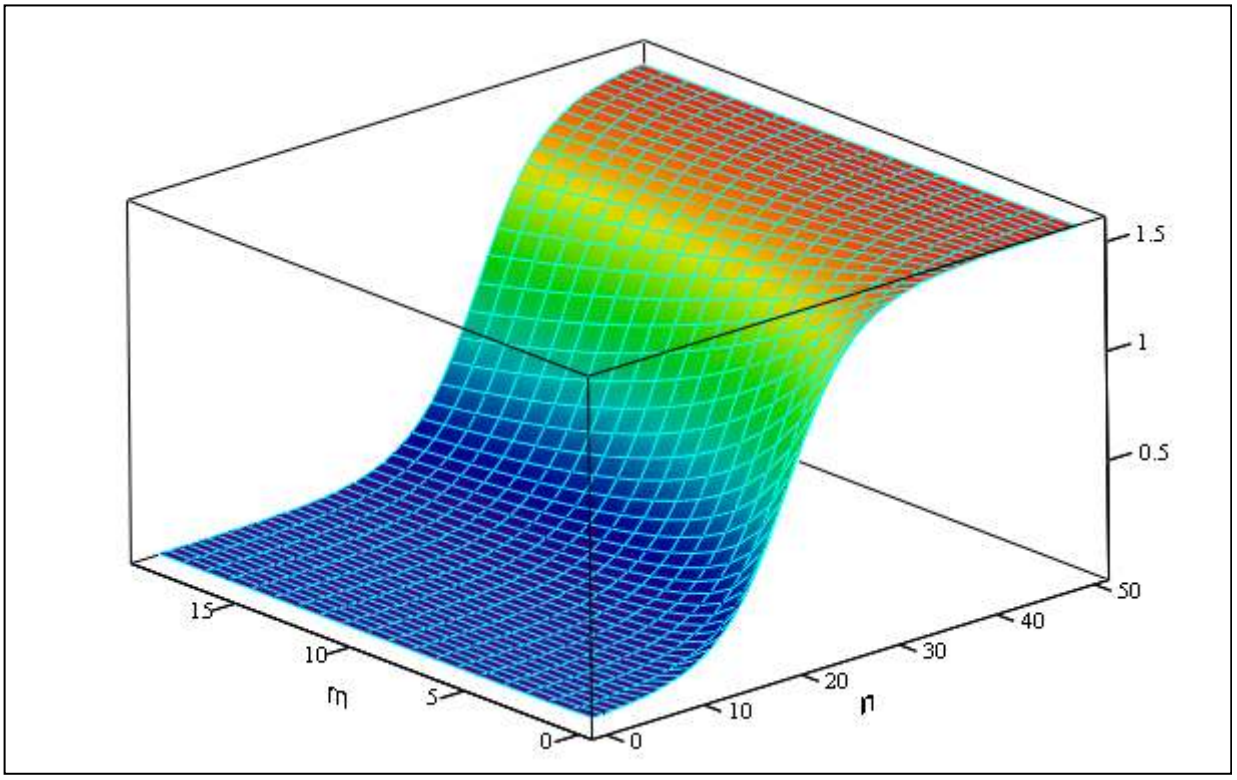
(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PD – badanie wpływu zmian wzmocnienia	Regulator PD z idealnymi blokami funkcyjnymi
$i := \sqrt{-1}$ $\quad Tr := 1$ $n := 0..50$ $\quad m := 0..19$ $\omega_n := 10^{\frac{n-20}{10}}$ $\quad kp_m := 1 + m$	Stałe parametry regulatora. Parametry pomocnicze.
	Wektory zmiennych pomocniczych ω, kp *– Zakres zmian częstotliwości* *$\omega \in (0.01, 1000)$* *– Zakres zmian wzmocnienia* *kp $\in$ (1, 20)*
$Kid(\omega, kp) := 20 \cdot \log(\lvert kp + i \cdot \omega \cdot Tr \rvert)$	Moduł transmitancji jako funkcja dwóch zmiennych.
$M_{n,m} := Kid(\omega_n, kp_m)$	Macierz wartości modułu transmitancji.
$\varphi id(\omega, kp) := \arg(kp + i \cdot \omega \cdot Tr)$	Argument transmitancji.
$\varphi_{n,m} := \varphi id(\omega_n, kp_m)$	Macierz argumentu transmitancji.

Tabela 1.7.6.2.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PD – badanie wpływu zmian wzmocnienia	Regulator PD z rzeczywistym różniczkowaniem
$i := \sqrt{-1}$ $\quad Tr := 1$ $\quad T1 := 0.1$ $n := 0..50$ $\quad m := 0..19$ $\omega_n := 10^{\frac{n-20}{10}}$ $\quad kp_m := 1 + m$	Stałe parametry regulatora. Parametry pomocnicze.
	Wektory zmiennych pomocniczych ω, kp *– Zakres zmian częstotliwości* *$\omega \in (0.01, 1000)$* *– Zakres zmian wzmocnienia* *kp $\in$ (1, 20)*
$Kid(\omega, kp) := 20 \cdot \log\left[\left\lvert kp + \frac{(i \cdot \omega \cdot Tr)}{1 + i \cdot \omega \cdot T1}\right\rvert\right]$	Moduł transmitancji jako funkcja dwóch zmiennych.
$M_{n,m} := Kid(\omega_n, kp_m)$	Macierz wartości modułu transmitancji.
$\varphi id(\omega, kp) := \arg\left[kp + \frac{(i \cdot \omega \cdot Tr)}{1 + i \cdot \omega \cdot T1}\right]$	Argument transmitancji.
$\varphi_{n,m} := \varphi id(\omega_n, kp_m)$	Macierz argumentu transmitancji.



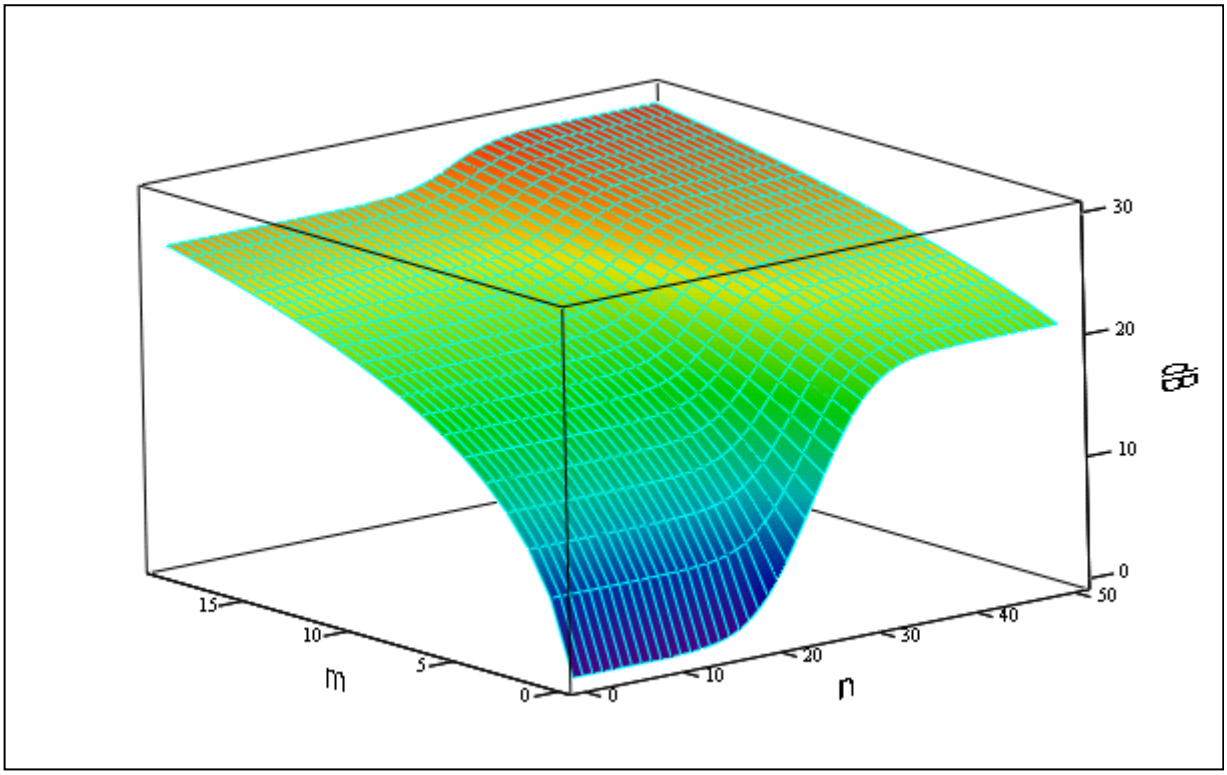
M



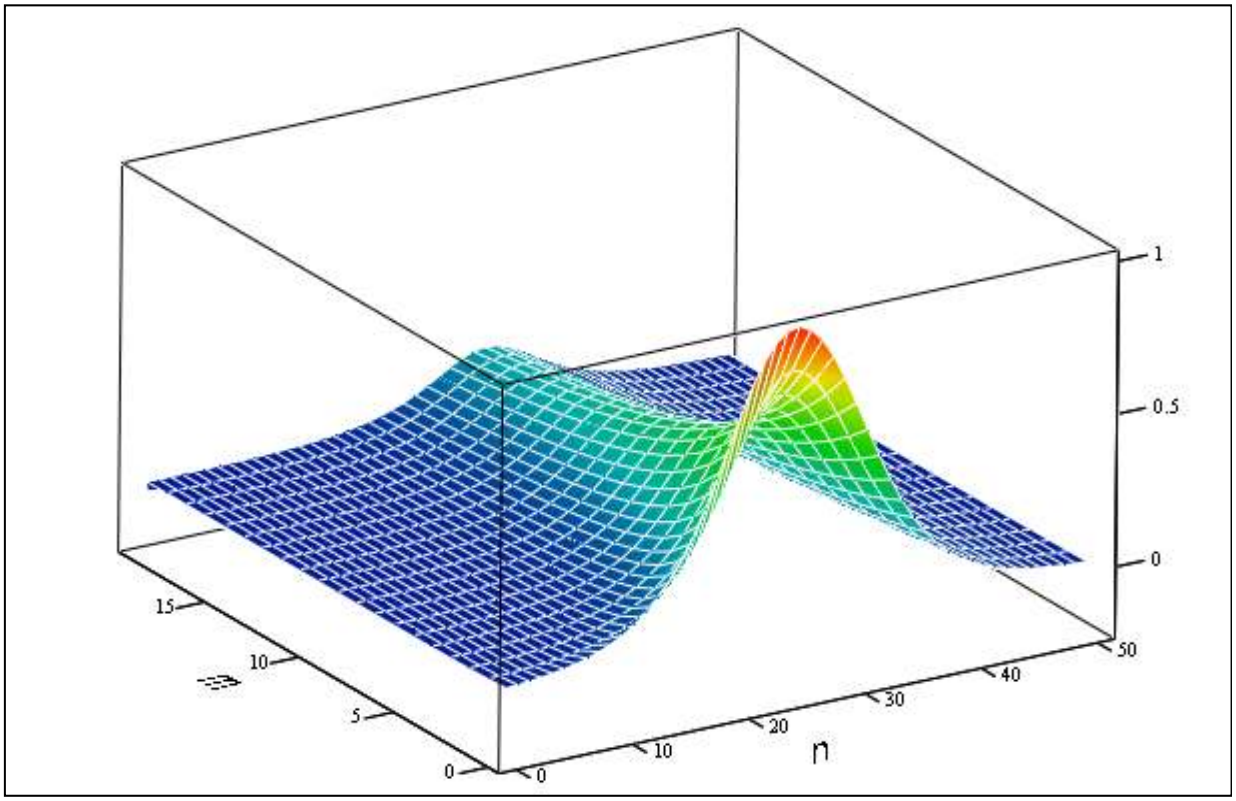
φ

Rys. 1.7.6.1. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych idealnego regulatora PD dla: kp ∈ (1, 20), Tr = 1

```
```



M



φ

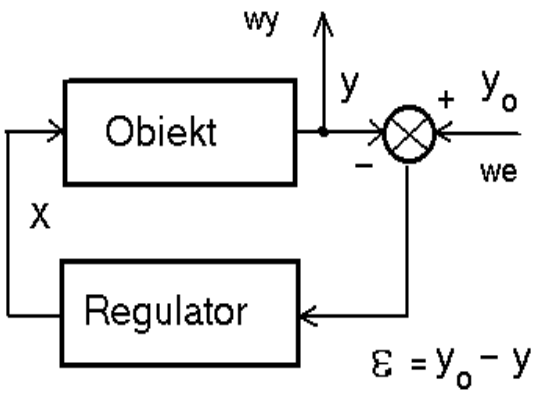
Rys. 1.7.6.2. Zestawienie charakterystyk amplitudowych i fazowych regulatora PD z rzeczywistym różniczkowaniem dla: kp ∈ (1, 20), Tr = 1, T1 = 0.1

2. Badanie matematycznych modeli liniowych układów regulacji

2.1. Wprowadzenie

Układ regulacji automatycznej, którego schemat ideowy przedstawiony jest na rysunku 2.1.1, ma wykonywać następujące zadania:

- niezwłocznie ustalać zadaną wartości sygnału wyjściowego y,
- kompensować oddziaływanie zmiennych czynników zewnętrznych (zakłóceń).



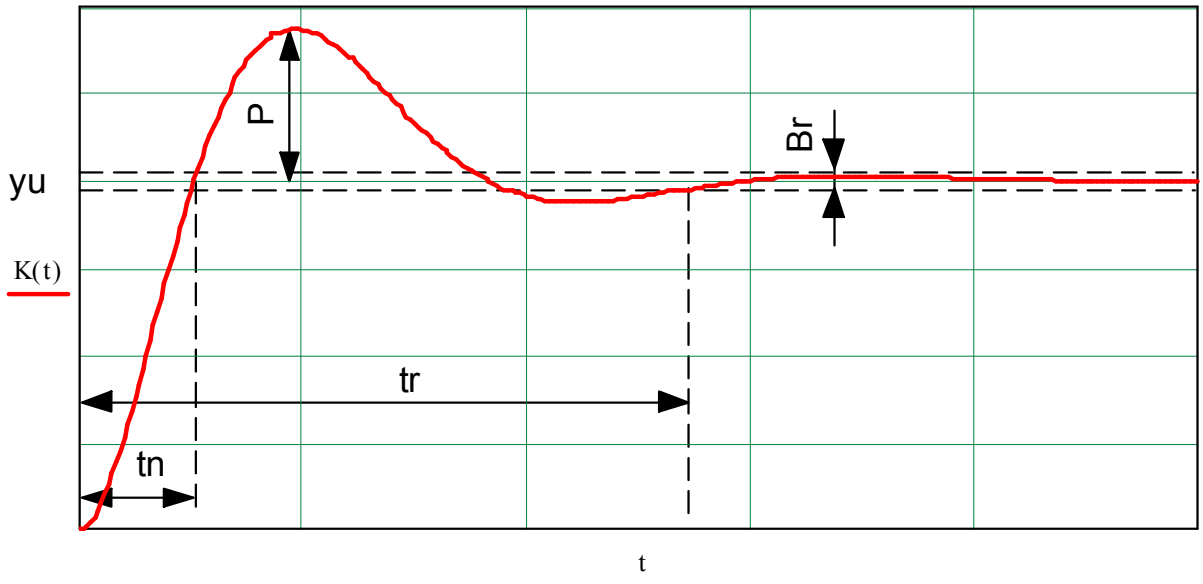
Rys. 2.1.1. Schemat ideowy układu regulacji jednej zmiennej

W rozdziale 1.7 zostały określone podstawowe zadania regulatora.

W tym rozdziale zostaną przedstawione wyniki badania właściwości wybranych (podstawowych) układów regulacji automatycznej.

Na rysunku 2.1.2 przebiegu zmian sygnału wyjściowego y w układzie regulacji przedstawiono istotne i ważne dla użytkownika wielkości, które charakteryzują pracę układu regulacji.

Przeregulowanie P oraz czas tn narastania sygnału wyjściowego y zależą od parametrów obiektu i regulatora. Czas regulacji tr dodatkowo zależy od zadanego przedziału tolerancji Br.

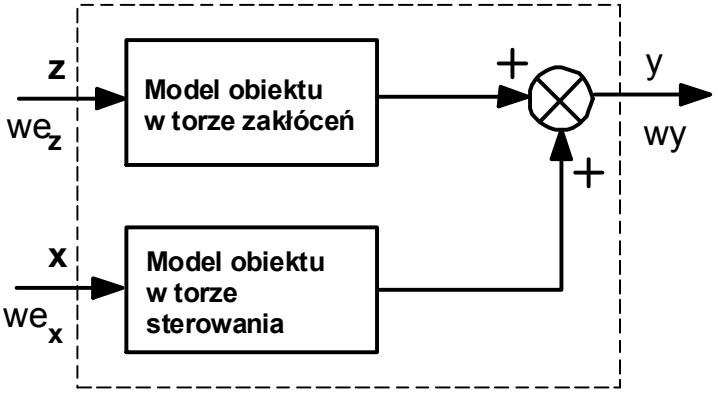


Rys. 2.1.2. Przebieg zmian sygnału wyjściowego – proces przejściowy w układzie regulacji

Dokładność regulacji nie może być zadawana dowolnie, ponieważ możliwości układu regulacji ograniczone są przez właściwości obiektu i oddziaływanie zakłóceń. Najbardziej pożądana postać przebiegu procesu przejściowego w układzie regulacji to przebieg charakteryzujący się małą wartością przeregulowania i zanikającymi oscylacjami lub przebieg aperiodyczny – bez przeregulowania.

2.2. Charakterystyka liniowych obiektów i układów regulacji

Tworząc równoważny odpowiednik modelu obiektu regulacji, który jest przedstawiony na rysunku 1.7.1, otrzymujemy schemat blokowy z dwoma wejściami i jednym wyjściem.

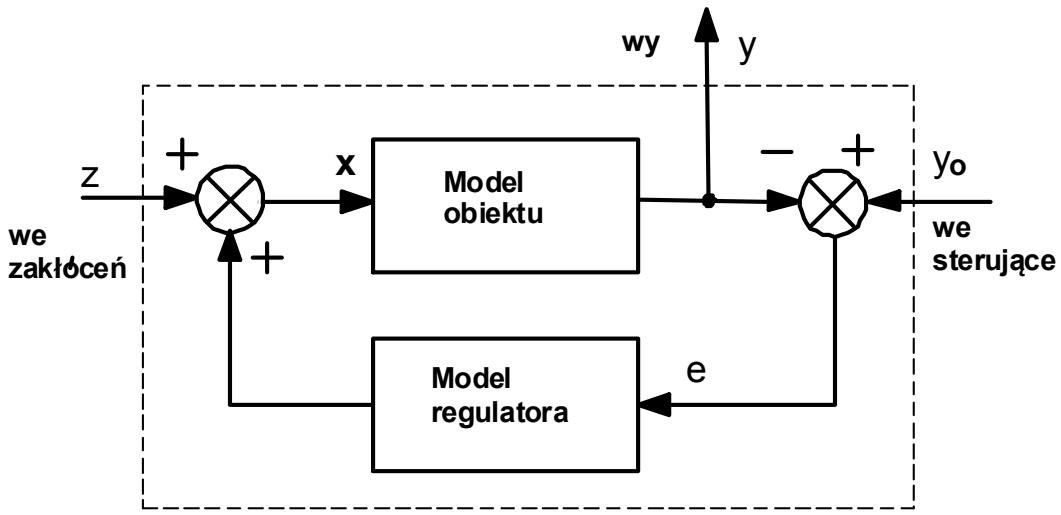


Rys. 2.2.1. Schemat blokowy obiektu, na który dodatkowo działa zakłócenie

Do analizy tego obiektu można zastosować zasadę superpozycji, ponieważ ta monografia przedstawia wyniki analiz obiektów liniowych, których właściwości charakteryzuje transmitancja.

Nazwa obiekt regulacji obejmuje również procesy technologiczne.

Analizę układu liniowego, w którym występuje jednoczesne oddziaływanie dwóch zmiennych yo, z, rozdziela się na dwa etapy. W pierwszym etapie badamy oddziaływanie zmiennej sterującej y_o, kiedy zmienna zakłócająca $z = 0$. W drugim etapie badamy oddziaływanie zmiennej zakłócającej z kiedy zmienna sterująca $yo = 0$. Analizę elementarnego modelu układu regulacji automatycznej, w którym występuje oddziaływanie zakłóceń, wyjaśniono na rysunku 2.2.2.



Rys. 2.2.2. Schemat blokowy elementarnego modelu układu regulacji, w którym zakłócenie działa na wejściu obiektu regulacji

Na podstawie znajomości transmitancji obiektów tworzących układ regulacji możemy określić transmitancję otwartego układu regulacji $K_{ZO} = K_O \cdot K_R$ oraz transmitancję Kz całego układu regulacji. W zależności od potrzeb stosuje się postać czasową, operatorową lub widmową tych transmitancji.

Transmitancja obiektu regulacji $$K_O(s) = \frac{y(s)}{x(s)} . \qquad (2.2.1)$$

Transmitancja regulatora $$K_R(s) = \frac{x(s)}{\varepsilon(s)} . \qquad (2.2.2)$$

Transmitancja otwartej pętli regulacji (*Transmitancja otwartego układu regulacji*) $$K_{zo}(s) = K_O(s) \cdot K_R(s) . \qquad (2.2.3)$$

Transmitancja zastępcza układu regulacji dla wyjścia Y

$$K_Y(s) = \frac{y(s)}{y_o(s)} = \frac{K_O(s) \cdot K_R(s)}{1 + K_O(s) \cdot K_R(s)} . \qquad (2.2.4)$$

Transmitancja zastępcza układu regulacji dla wyjścia X (*inaczej – wejścia obiektu regulacji*)

$$K_X(s) = \frac{x(s)}{y_o(s)} = \frac{K_R(s)}{1 + K_O(s) \cdot K_R(s)} . \qquad (2.2.5)$$

Transmitancja zastępcza układu regulacji dla wyjścia E *(inaczej - wejścia regulatora)*

$$K_E(s) = \frac{e(s)}{y_o(s)} = \frac{1}{1 + K_O(s) \cdot K_R(s)} . \qquad (2.2.6)$$

Sygnał wyjściowy obiektu regulacji dla układu regulacji, w którym zakłócenie działa na wejściu obiektu regulacji (zob. rys. 2.2.2), określa wzór:

$$y(s) = y_o(s) \cdot \frac{K_O(s) \cdot K_R(s)}{1 + K_O(s) \cdot K_R(s)} + z(s) \cdot \frac{K_O(s)}{1 + K_O(s) \cdot K_R(s)} . \qquad (2.2.7)$$

2.3. Praktyczne zasady wyboru typu regulatora dla liniowych układów regulacji

Jeżeli w układzie regulacji znajduje się obiekt całkujący sygnał błędu regulacji, to w stanie ustalonym sygnał błędu tego układu regulacji może być równy zero, tzn. $\lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = 0$, lub mówiąc inaczej, zachodzi równości sygnału sterującego y_o i sygnału wyjściowego y. Operacja całkowania sygnału błędu regulacji może być wykonywana przez regulator lub obiekt regulacji.

Dla obiektów niezawierających całkowania warunek zerowej wartości sygnału błędu regulacji w stanie ustalonym zapewniają regulatory PI, PID. Jeżeli nie jest wymagane spełnienie tego warunku, można stosować regulatory proporcjonalne P. Wówczas wartość sygnału błędu regulacji będzie funkcją wzmocnień obiektu i regulatora.

Postulat niezwłocznego ustalania zadanej wartości sygnału na wyjściu obiektu regulacji wymaga przeprowadzenia optymalizacji doboru wartości parametrów regulatora.

Dla obiektów o parametrach skupionych, których matematyczne modele (transmitancje) można przedstawić jako kombinacje inercji, całkowania i różniczkowania, skutecznym sposobem ograniczania czasu regulacji tr jest zastosowanie regulatorów posiadających właściwość kompensacji inercji obiektu.

Kompensacja inercji obiektu w układzie regulacji polega na przyjęciu założenia równości odpowiednich stałych czasowych w transmitancjach obiektu i regulatora, które przedstawione są w postaci ilorazu wielomianów.

Transmitancja obiektu inercyjnego wyższego rzędu – dokładniej: szeregowego połączenia obiektów inercyjnych pierwszego rzędu – ma wówczas postać,

$$K_O(s) = \frac{k_O}{(1+s\cdot T_1)\cdot(1+s\cdot T_2)\cdots(1+s\cdot T_N)}, \qquad (2.3.1)$$

a transmitancję regulatora PID (szeregowe połączenie regulatora PD i PI) określa wzór:

$$K_R(s) = \frac{k_R\cdot(1+s\cdot T_R)\cdot(1+s\cdot T_V)}{s\cdot T_V}. \qquad (2.3.2)$$

Dla stałych czasowych obiektu regulacji spełniających warunek $T_1>T_2>....T_N$ korzystnie jest założyć, że czas T_V całkowania regulatora i czas T_R różniczkowania regulatora są równe największym wartościom stałych czasowych modelu obiektu regulacji i wówczas

$$T_V = T_1 \qquad T_R = T_2. \qquad (2.3.3)$$

Na podstawie wzoru 2.2.3 transmitancja otwartej pętli układu regulacji ma postać:

$$K_{zo}(s) = K_O(s)\cdot K_R(s) = \frac{k_O\cdot k_R}{s\cdot T_V\cdot(1+s\cdot T_3)\cdots(1+s\cdot T_N)}. \qquad (2.3.4)$$

W mianowniku wzoru (2.3.4) nie ma iloczynów $(1+ s\cdot T_1)\cdot(1+ s\cdot T_2)$ największych wartości stałych czasowych obiektu regulacji. Całkujące i różniczkujące działanie regulatora uprościło wzór określający transmitancję otwartej pętli regulacji.

Na podstawie wzoru (2.2.4) transmitancja układu regulacji, w którym regulator PID kompensuje działanie dwóch inercyjnych składników modelu obiektu regulacji, ma postać:

$$K_Y(s) = \frac{k_O\cdot k_R}{k_o\cdot k_R + s\cdot T_V\cdot(1+s\cdot T_3)\cdots(1+s\cdot T_N)}. \qquad (2.3.5)$$

Synteza układów sterowania jest zagadnieniem złożonym. W praktyce technicznej użytkownik i projektant układów sterowania zobowiązany jest do:

- przeprowadzenia identyfikacji – wyznaczenia transmitancji obiektu regulacji,
- określenia dokładności regulacji,
- wyboru algorytmu sterowania – regulator P, PI, PD, PID,
- określenia warunków stabilnej pracy układu regulacji,
- optymalizacji doboru wartości parametrów regulatora (nastaw),
- sprawdzenia skuteczności tłumienia zakłóceń.

Każda z wyżej wymienionych czynności powinna być wykonana z zachowaniem należytej staranności, a jeżeli stosowane są uproszczone metody doboru wartości parametrów regulatora, to praca układu regulacji może być niezadowalająca. Przedstawione w dalszej części książki przykłady obliczeń i wykresy zmian sygnałów w układzie regulacji mogą wspomagać proces projektowania lub doboru parametrów regulatora w prostych układach automatycznej regulacji, zwłaszcza w przypadkach stosowania uproszczonych modeli obiektów regulacji.

2.4. Analiza układu automatycznie regulującego obiekt inercyjny

Analiza układu automatycznie regulującego obiekt inercyjny trzeciego rzędu z regulatorem PID kompensującym działanie dwóch inercyjnych składników obiektu regulacji zostanie przeprowadzona z wykorzystaniem wzorów (2.3.4), (2.3.5), gdzie dla $T_V = T_1$ oraz $T_R = T_2$ transmitancja układu regulacji ma postać:

$$K_Y(s) = \frac{k_O \cdot k_R}{k_O \cdot k_R + s \cdot T_1 \cdot (1 + s \cdot T_3)} = \frac{k_O \cdot k_R}{k_O \cdot k_R + s \cdot T_1 + s^2 \cdot T_1 \cdot T_3} \qquad (2.4.1)$$

lub

$$K(s) = \frac{1}{1 + s \cdot \frac{T_1}{k_O \cdot k_R} + s^2 \cdot \frac{T_1}{k_O \cdot k_R} \cdot T_3} = \frac{b_0}{a_0 + s \cdot a_1 + s^2 \cdot a_2} \; . \qquad (2.4.2)$$

Należy zauważyć, że zastosowanie kompensacji inercji zmniejszyło w transmitancji układu regulacji stopień wielomianu mianownika. W tym przypadku wzór (2.4.2) określający transmitancję układu regulacji jest równoważny transmitancji obiektu drugiego rzędu, ponieważ współczynniki a_o oraz b_o mogą być równe 1 (zob. wzór 1.4.0).

Pozostającą do określenia wartość wzmocnienia regulatora można wyznaczyć z warunku niezwłocznego działania układu regulacji, który oznacza, że postulujemy, by moduł transmitancji układu regulacji był constans i równy 1 w możliwie dużym przedziale częstotliwości, praktycznie od zera do częstotliwości granicznej. Układ regulacji w tym przedziale częstotliwości ma właściwości obiektu proporcjonalnego.

Dla transmitancji (2.4.2), w której podstawiamy $s = i \cdot \omega$, wartość modułu określa wzór:

$$\left|K(\omega)\right| = \frac{b_0}{\sqrt{a_0^2 - \omega^2 \cdot (2 \cdot a_0 \cdot a_2 - a_1^2) + \omega^4 \cdot a_2^2}} \; . \qquad (2.4.3)$$

Przybliżone rozwiązanie postulowanej wartości wzmocnienia regulatora określa warunek

$$2 \cdot a_0 \cdot a_2 - a_1^2 = 0 \; . \qquad (2.4.4)$$

Porównując wzory (2.4.1) i (2.4.2), wyznaczamy: $a_0 = k_O \cdot k_R$, $a_1 = T_1$, $a_2 = T_1 \cdot T_3$, $b_0 = 1$.

Wartość wzmocnienia regulatora na podstawie warunku (2.4.4) określa wzór:

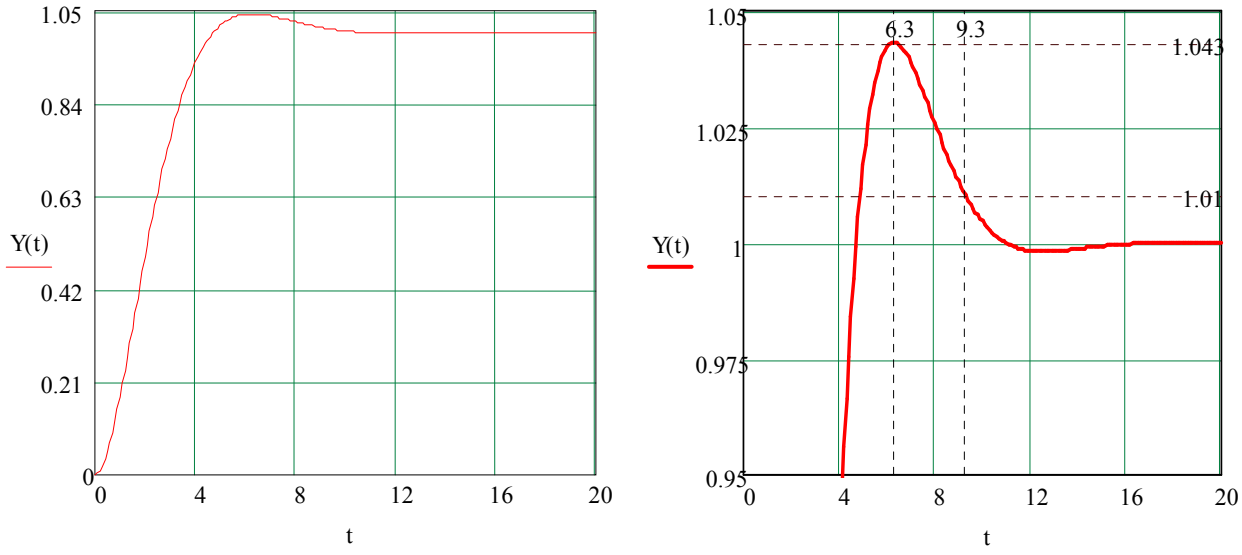
$$k_R = \frac{T_1}{2 \cdot k_O \cdot T_3} \; . \qquad (2.4.5)$$

Transmitancja układu regulacji po optymalizacji wynosi:

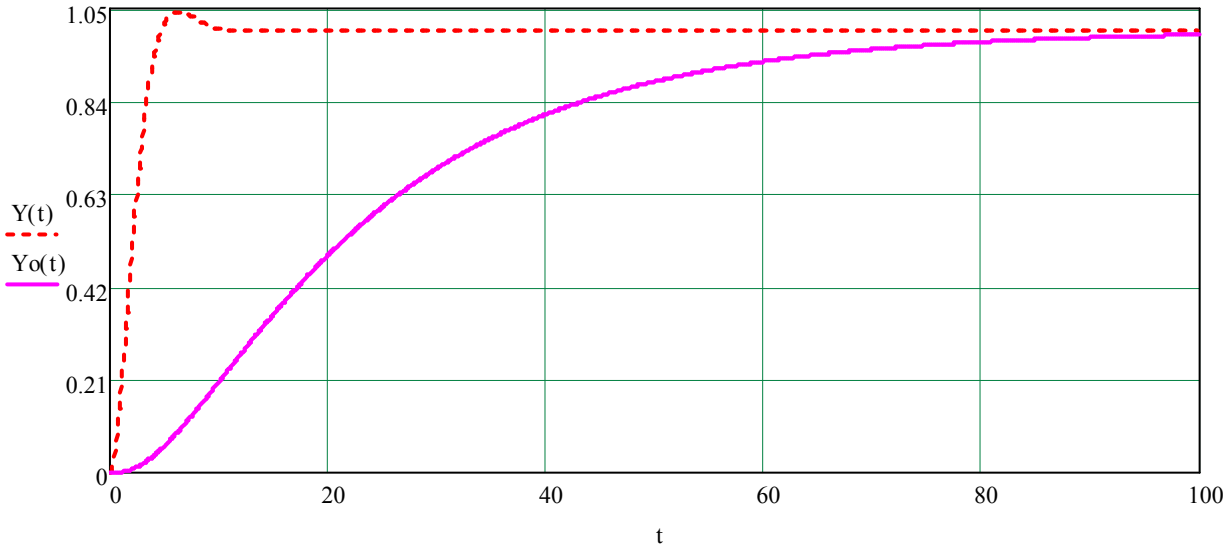
$$K_{OP}(s) = \frac{1}{1 + 2 \cdot T_3 \cdot s + 2 \cdot T_3 \cdot s^2} = \frac{y(s)}{y_o(s)} \; . \qquad (2.4.6)$$

Po wykonaniu kompensacji inercji i optymalizacji wartości wzmocnienia regulatora dla sygnału sterującego $y_o(s) = \frac{1}{s} \rightarrow y_o(t) = 1(t)$ sygnał wyjściowy układu regulacji określa wzór:

$$y(t) = 1 - e^{\frac{-t}{2T_3}} \cdot (\cos\frac{t}{2T_3} + \sin\frac{t}{2T_3}) \,. \qquad (2.4.7)$$



Rys. 2.4.1. Sygnał wyjściowy układu regulacji określony przez wzór (2.4.7) dla $T_3 = 1$



Rys. 2.4.2. Sygnały wyjściowe. Charakterystyka czasowa Yo obiektu regulacji dla: $T_1 = 20$, $T_2 = 5$, $T_3 = 1$, ko = 1 oraz charakterystyka czasowa Y układu regulacji dla obiektu jw. z regulatorem PID, w którym zastosowano:

$$T_V = 20,\ T_R = 5,\ k_R = \frac{T_1}{2 \cdot k_O \cdot T_3} = 10$$

Przebieg określony wzorem (2.4.7) jest przebiegiem o charakterze oscylacji tłumionej, dla której pierwsze przeregulowanie wynosi 4.3%, a czas regulacji dla przedziału tolerancji Br = +/- 1% wynosi $t_r \approx 9{,}3 \cdot T_3$ (zob. rys. 2.4.1).

Podsumowanie

Porównując czas tu ≈ 100 sek. (zob. rys. 2.4.2) ustalania wartości sygnału wyjściowego w odosobnionym obiekcie regulacji (tzn. obiekt bez układu regulacji) z czasem regulacji tr ≈ 9,3 sek., który został wyznaczony np. dla 1% przedziału tolerancji Br wartości ustalonej yu sygnału wyjściowego w obiekcie regulowanym, dostrzegamy wielokrotne skrócenie czasu trwania procesu przejściowego.

Tabela 2.4.1.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyka czasowa układu regulacji z obiektem inercyjnym trzeciego rzędu (*szeregowe połączenie trzech obiektów inercyjnych pierwszego rzędu*) i regulatorem PID	*Obliczenia symboliczne sygnałów w układach regulacji w większości przypadków prowadzą do długich wyników. Wyniki wykraczające poza szerokość dokumentu Mathcada czasami daje się przeformatować za pomocą operatora „Break With Plus" (złam linię na znaku plus* – klawisze [Ctrl][Enter] dla znacznika wyrażenia znajdującego się po lewej stronie znaku plus*), wyrażenie zostaje podzielone na dwie części wyświetlone w dwóch liniach, połączone wielokropkiem i znakiem plus.*
Obliczenie sygnału wyjściowego obiektu odosobnionego – bez układu regulacji, ko = 1 $\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(1 + s \cdot T1) \cdot (1 + s \cdot T2) \cdot (1 + s \cdot T3)}$ (2.4.8)	*– wpisz transformatę sygnału wyjściowego trzech szeregowo połączonych obiektów inercyjnych pierwszego rzędu* *– oblicz odwrotną transformatę Laplace'a* *– określ sygnał wyjściowy Yo(t):=*

$$Yo(t) := \left[-\frac{\begin{matrix} T1 \cdot T2^2 - T1^2 \cdot T2 - T1 \cdot T3^2 + T1^2 \cdot T3 + T2 \cdot T3^2 - T2^2 \cdot T3 \ ... \\ + T1^2 \cdot T2 \cdot e^{-\frac{t}{T1}} - T1 \cdot T2^2 \cdot e^{-\frac{t}{T2}} - T1^2 \cdot T3 \cdot e^{-\frac{t}{T1}} + T1 \cdot T3^2 \cdot e^{-\frac{t}{T3}} + T2^2 \cdot T3 \cdot e^{-\frac{t}{T2}} - T2 \cdot T3^2 \cdot e^{-\frac{t}{T3}} \end{matrix}}{(T1 - T2) \cdot (T1 - T3) \cdot (T2 - T3)} \right.$$

lub zapis równoważny – utworzony dla edytorskich potrzeb tej monografii

$$Yo(t) := -\frac{T1 \cdot T2^2 - T1^2 \cdot T2 - T1 \cdot T3^2 + T1^2 \cdot T3 + T2 \cdot T3^2 - T2^2 \cdot T3}{(T1 - T2) \cdot (T1 - T3) \cdot (T2 - T3)} - \blacksquare$$

$$-\frac{T1^2 \cdot T2 \cdot e^{-\frac{t}{T1}} - T1 \cdot T2^2 \cdot e^{-\frac{t}{T2}} - T1^2 \cdot T3 \cdot e^{-\frac{t}{T1}} + T1 \cdot T3^2 \cdot e^{-\frac{t}{T3}} + T2^2 \cdot T3 \cdot e^{-\frac{t}{T2}} - T2 \cdot T3^2 \cdot e^{-\frac{t}{T3}}}{(T1 - T2) \cdot (T1 - T3) \cdot (T2 - T3)}$$

Obliczenie sygnału wyjściowego Y obiektu regulowanego – w układzie regulacji jw.

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+s\cdot\frac{T1}{ko\cdot kr}+s^2\cdot\frac{T1\cdot T3}{ko\cdot kr}}$$

– wpisz transformatę sygnału dla wyjścia Y
– oblicz odwrotną transformatę Laplace'a
– określ sygnał wyjściowy Y1(t):=

Transformata sygnału Y

$$Y1(t) := -\frac{e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)-T3\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}\ \ldots}{T3\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}$$
$$\ldots\ +\frac{T3\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{T3\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}$$

(sygnał wyjściowy Y)

Obliczenie sygnału błędu regulacji E – w układzie regulacji z obiektem jw.

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{s\cdot T1+s^2\cdot T1\cdot T3}{ko\cdot kr+s\cdot T1+s^2\cdot T1\cdot T3}$$

– wpisz transformatę sygnału dla wyjścia E
– oblicz odwrotną transformatę Laplace'a
– określ sygnał wyjściowy E(t):=

Transformata sygnału E

$$E(t) := \frac{e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\left(\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)+T3\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}\right)}{T3\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}$$

(sygnał wyjściowy E)

Obliczenie sygnału wyjściowego X regulatora PID – w układzie regulacji z obiektem jw.

$$\frac{1}{s}\cdot\frac{(1+s\cdot T1)\cdot(1+s\cdot T2)\cdot(1+s\cdot T3)\cdot kr}{ko\cdot kr+s\cdot T1+s^2\cdot T1\cdot T3}$$

– wpisz transformatę sygnału dla wyjścia X
– oblicz odwrotną transformatę Laplace'a
– określ sygnał wyjściowy X(t):=

Transformata sygnału X

$$X(t) := \frac{1}{T1\cdot T3\cdot ko\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}\cdot\left[\begin{array}{l} T1\cdot T3\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}} - T1\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right) \ldots \\ + \left(-T1\cdot T3\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}\right) \ldots \\ + \left(-2\cdot T2\cdot ko^2\cdot kr^2\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\right) \ldots \\ + T1\cdot ko\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right) \ldots \\ + T2\cdot ko\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right) \ldots \\ + 2\cdot T3\cdot ko\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right) \ldots \\ + T1\cdot T3\cdot ko\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}} \ldots \\ + T2\cdot T3\cdot ko\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}} \ldots \\ + T1\cdot T2\cdot T3\cdot ko\cdot kr\cdot\Delta(t)\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}} \end{array}\right]$$

(sygnał wyjściowy E)

Wykresy sygnałów w układzie regulacji jw.

$t := 0, 0.1 .. 20$ $\quad ko := 1$ $\quad \Delta(t) := 0$

$T1 := 20$ $\quad T2 := 5$ $\quad T3 := 1$ $\quad kr := 7$

Yo(t) : = ...

Y(t) : = ...

X(t) : = ...

E(t): = ...

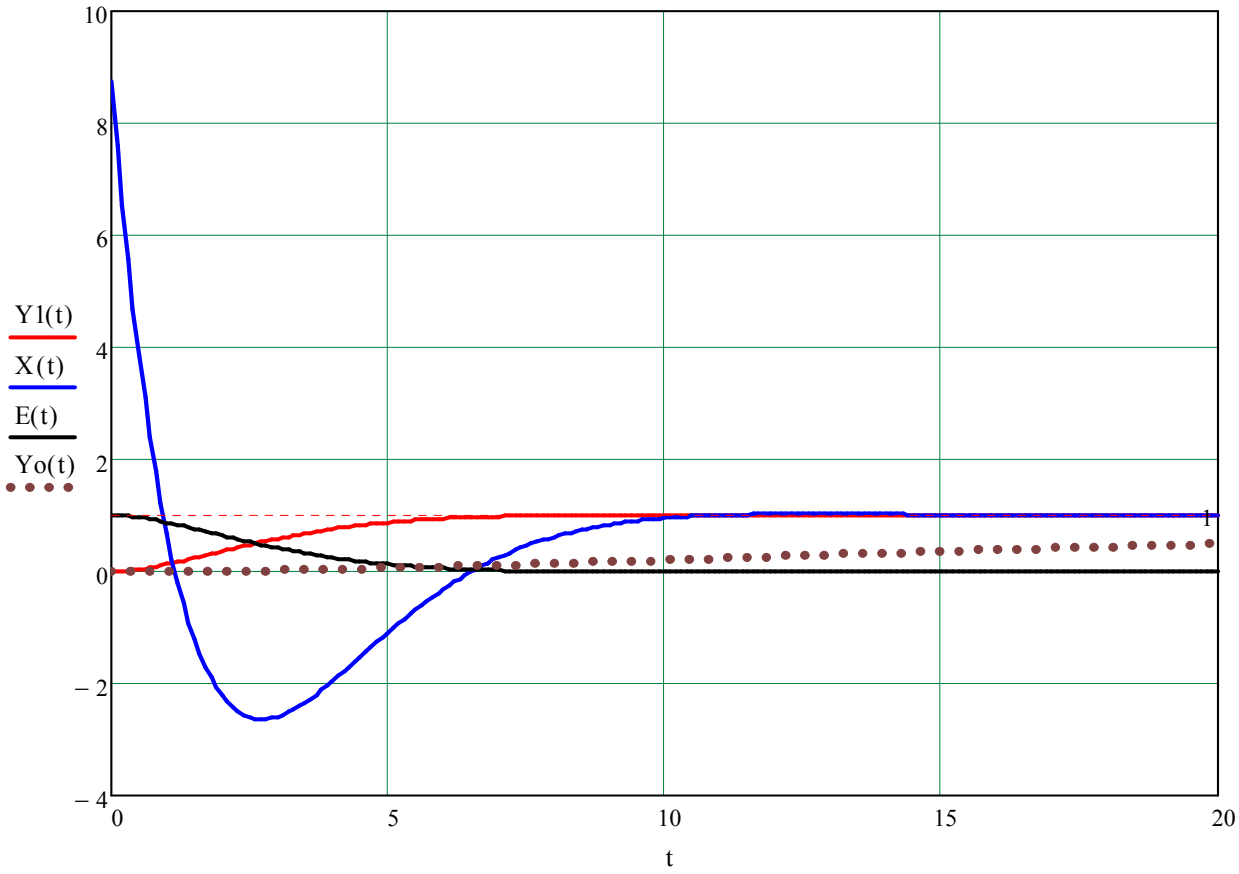
Przed wzorami określającymi sygnały wyjściowe: Yo - obiektu odosobnionego, Y - obiektu regulacji, X - regulatora, E - błędu regulacji

– wpisz parametry obliczeń

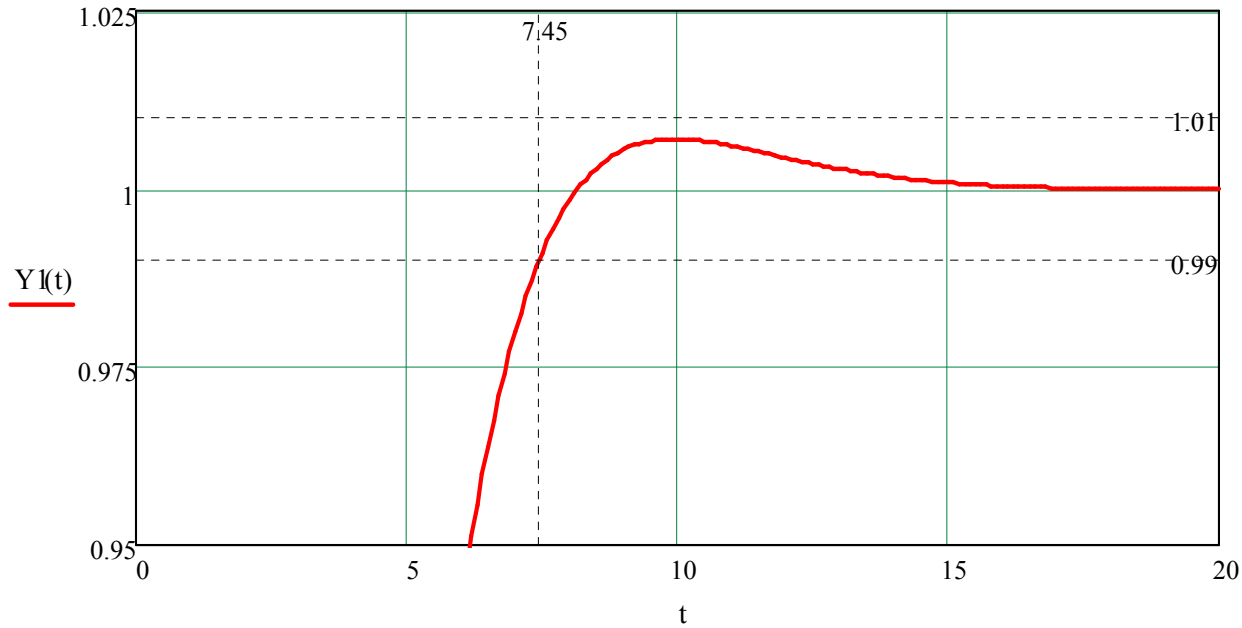
– pamiętaj, że $T_V = T_1$, $T_R = T_2$

– wywołaj wykres

– określ parametry wykresu jak na rysunku 2.4.3



Rys. 2.4.3. Sygnały układu regulacji dla obiektu inercyjnego i regulatora PID, których parametry określono w tabeli 2.4.1



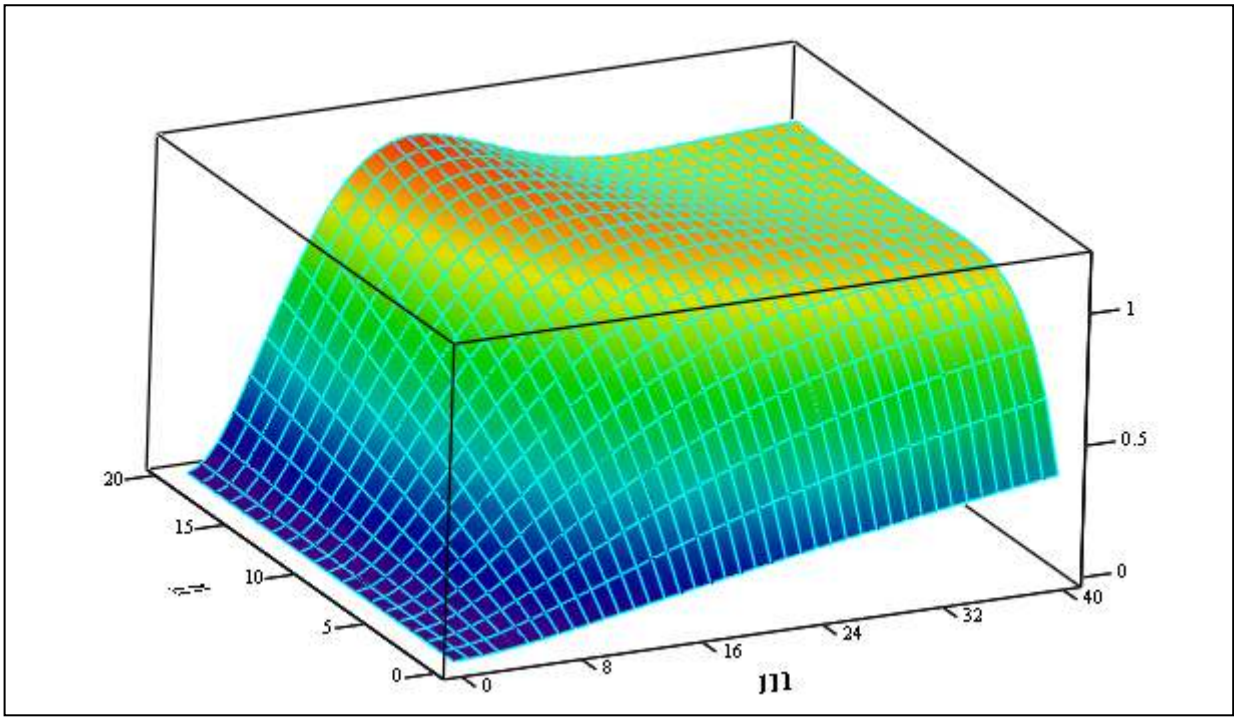
Rys. 2.4.4. Przedział tolerancji sygnału wyjściowego obiektu regulowanego w układzie regulacji z tabeli 2.4.1

Podsumowanie

Przebieg zmian wyjściowego sygnału w obiekcie regulowanym wyznaczony dla wzmocnienia $k_R = 7$ regulatora PID, w którym czas całkowania $T_V = T_1 = 20$, czas różniczkowania $T_R = T_2 = 5$ (inercja obiektu $T_3 = 1$), wskazuje, że uproszczony sposób wyznaczenia wzmocnienia regulatora (na podstawie wzoru 4.5) jako $k_R = \frac{T_1}{2 \cdot k_O \cdot T_3} = 10$ *niekorzystnie wpływa na właściwości układu regulacji. Dla wzmocnienia $k_R = 7$ czas regulacji tr – czas ustalania sygnału wyjściowego – jest mniejszy i wynosi $tr \approx 7{,}45 \cdot T3$. Poprzednia wartość czasu regulacji wynosiła $tr \approx 9{,}3 \cdot T3$ (zob. wzór 2.4.7 i rys. 2.4.1). Obszerniejszą analizę wpływu wzmocnienia regulatora na sygnał wyjściowy obiektu przedstawiają zestawienia charakterystyk na kolejnych rysunkach.*

Tabela 2.4.2.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Analiza wpływu wzmocnienia regulatora na sygnał wyjściowy obiektu regulacji – zestawienie charakterystyk czasowych	Regulator PID $T_V = T_1$, $T_R = T_2$
$t := 0, 0.1 .. 20$ $ko := 1.001 \quad T1 := 20 \quad T2 := 5 \quad T3 := 1$	Parametry obiektu regulacji
$m := 0 .. 40 \qquad n := 0 .. 19$ $t_m := 0 + 0.25\ m \qquad kr_n := 1 + n$	Zakresy i wektory zmiennych pomocniczych
$Y1(t, kr) := -\dfrac{e^{-\frac{t}{2 \cdot T3}} \cdot \sinh\left(\dfrac{t \cdot \sqrt{\frac{T1 - 4 \cdot T3 \cdot ko \cdot kr}{T1 \cdot T3^2}}}{2}\right) - T3 \cdot \sqrt{\frac{T1 - 4 \cdot T3 \cdot ko \cdot kr}{T1 \cdot T3^2}} \ldots + T3 \cdot e^{-\frac{t}{2 \cdot T3}} \cdot \cosh\left(\dfrac{t \cdot \sqrt{\frac{T1 - 4 \cdot T3 \cdot ko \cdot kr}{T1 \cdot T3^2}}}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{T1 - 4 \cdot T3 \cdot ko \cdot kr}{T1 \cdot T3^2}}}{T3 \cdot \sqrt{\frac{T1 - 4 \cdot T3 \cdot ko \cdot kr}{T1 \cdot T3^2}}}$	Sygnał wyjściowy (zob. tab. 2.4.1)
$Y1_{m,n} := Y1(t_m, kr_n)$	Macierz wartości sygnału wyjściowego
Zakresy obliczeń cyfrowych należy dostosowywać do właściwości wyrażeń matematycznych (punkty nieciągłości, zera w mianownikach), zwłaszcza podczas wykonywania obliczeń macierzowych. W przypadku tego przykładu problem związany jest z różnicą $T1 - 4 \cdot T3 \cdot ko \cdot kr$ *występującą pod znakiem pierwiastka funkcji hiperbolicznych, dlatego założono ko=1.001.*	



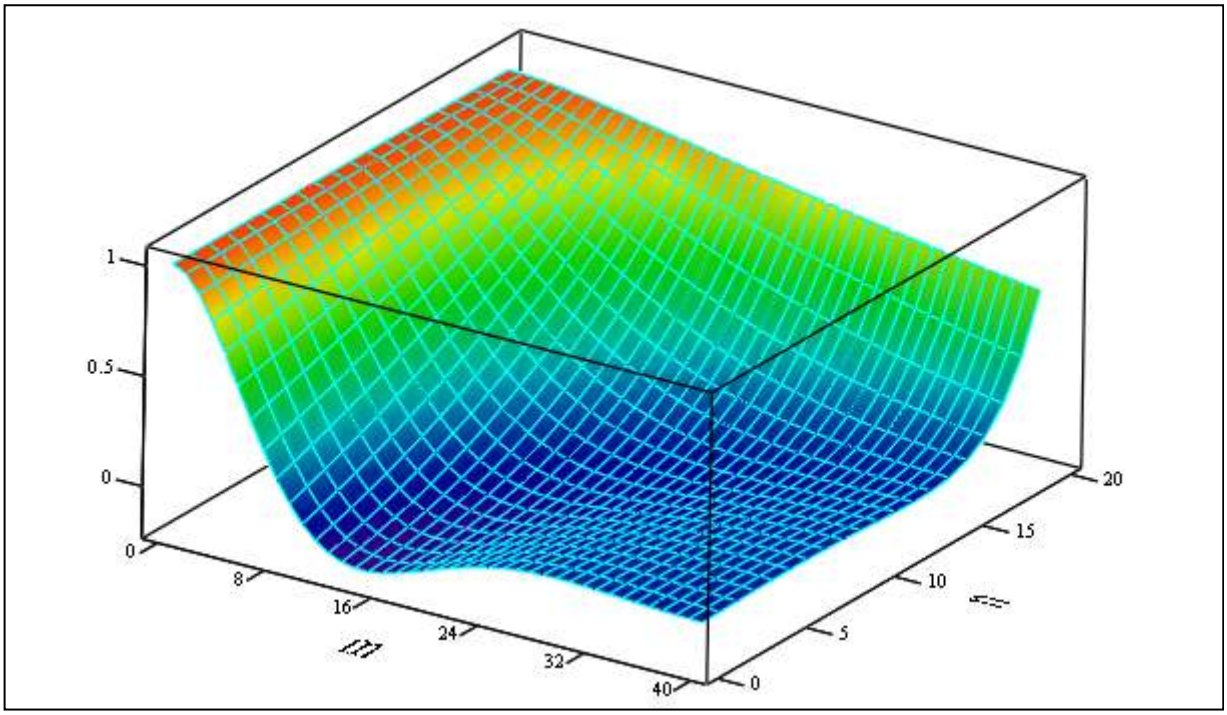
Y1

Rys. 2.4.5. Zestawienie charakterystyk czasowych obiektu regulowanego dla zmiennej wartości wzmocnienia regulatora (sygnał wyjściowy obiektu regulacji)

Tabela 2.4.3.

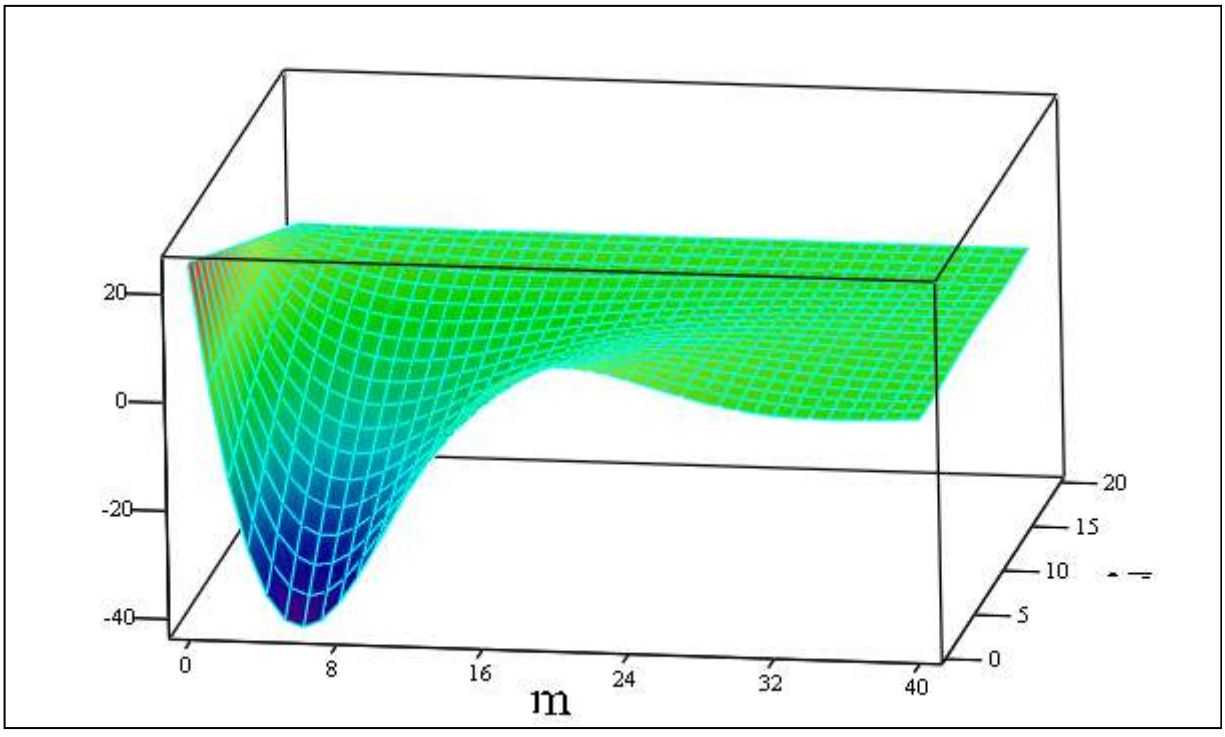
(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Analiza wpływu wzmocnienia regulatora na sygnał błędu regulacji – zestawienie charakterystyk czasowych	Regulator PID $T_V = T1$, $T_R = T2$
$t := 0, 0.1 .. 20$ $ko := 1.001 \quad T1 := 20 \quad T2 := 5 \quad T3 := 1$ $m := 0 .. 40 \quad n := 0 .. 19$ $t_m := 0 + 0.25m \quad kr_n := 20 - 0.5 \cdot n$ $E(t, kr) := \dfrac{e^{-\frac{t}{2 \cdot T3}} \cdot \left(\sinh\left(\dfrac{t \cdot \sqrt{\frac{T1 - 4 \cdot T3 \cdot ko \cdot kr}{T1 \cdot T3^2}}}{2} \right) ... + T3 \cdot \cosh\left(\dfrac{t \cdot \sqrt{\frac{T1 - 4 \cdot T3 \cdot ko \cdot kr}{T1 \cdot T3^2}}}{2} \right) \cdot \sqrt{\frac{T1 - 4 \cdot T3 \cdot ko \cdot kr}{T1 \cdot T3^2}} \right)}{T3 \cdot \sqrt{\frac{T1 - 4 \cdot T3 \cdot ko \cdot kr}{T1 \cdot T3^2}}}$ $E_{m,n} := E(t_m, kr_n)$	Parametry obiektu regulacji Zakresy i wektory zmiennych pomocniczych Sygnał błędu regulacji (zob. tab. 2.4.1) Macierz wartości błędu regulacji

```
```



E

Rys. 2.4.6. Zestawienie charakterystyk sygnału błędu regulacji dla zmiennej wartości wzmocnienia regulatora



X

Rys. 2.4.7. Zestawienie charakterystyk sygnału wyjściowego regulatora dla zmiennej wartości wzmocnienia regulatora (zob. tab. 2.4.4).

```
```

Tabela 2.4.4.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Analiza wpływu wzmocnienia regulatora na sygnał wyjściowy regulatora – zestawienie charakterystyk czasowych (rys. 2.4.7)	Regulator PID $T_V = T1$, $T_R = T2$
$t := 0, 0.1..20$ $\quad \Delta(t) := 0$ $ko := 1.001 \quad T1 := 20 \quad T2 := 5 \quad T3 := 1$ $m := 0..40 \quad n := 0..19$ $t_m := 0 + 0.25 \cdot m \quad kr_n := 20 - 0.5 \cdot n$	Parametry obiektu regulacji Zakresy i wektory zmiennych pomocniczych (zob. tab. 2.4.1)

$$X(t,kr) := \frac{1}{T1\cdot T3\cdot ko\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}\cdot\left[\begin{array}{l} T1\cdot T3\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}} - T1\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\ldots \\ +\left(-T1\cdot T3\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}\right)\ldots \\ +\left(-2\cdot T2\cdot ko^2\cdot kr^2\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\right)\ldots \\ +T1\cdot ko\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\ldots \\ +T2\cdot ko\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\ldots \\ +2\cdot T3\cdot ko\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\ldots \\ +T1\cdot T3\cdot ko\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}\ldots \\ +T2\cdot T3\cdot ko\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}}\ldots \\ +T1\cdot T2\cdot T3\cdot ko\cdot kr\cdot\Delta(t)\cdot\sqrt{\frac{T1-4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{T1\cdot T3^2}} \end{array}\right]$$

$X_{m,n} := X(t_m, kr_n)$ – macierz wartości sygnału wyjściowego regulatora

Porównanie wyników obliczeń teoretycznych z zakresami wielkości fizycznych występujących w praktycznie realizowanych procesach technologicznych prowadzi do ważnego spostrzeżenia. Początkowe wartości sygnału x sterującego obiektem regulacji dla skokowej zmiany sygnału $y_o = 1$ (rozruch procesu technologicznego) są wielokrotnie większe od wartości tego skoku (działanie proporcjonalne i różniczkujące regulatora). Dodatkowo (uwzględniając konstrukcyjne ograniczenia maksymalnej wartości sygnału x sterującego rzeczywistym obiektem regulacji, które zabezpieczają go przed uszkodzeniem lub zniszczeniem np. przez energię grzejną dostarczaną do obiektów cieplnych lub moment napędowy maszyn, ciśnienie i siły w układach hydraulicznych itd.) dostrzegamy konieczność ograniczenia wartości skoków wielkości sterującej rzeczywistym układem regulacji. Jeżeli rzeczywisty układ regulacji będzie sterowany szybkozmiennymi sygnałami o dużych wartościach zmian, to w układzie regulacji może wystąpić zjawisko ograniczania wartości sygnałów, zwłaszcza wyjściowego sygnału (x) regulatora, i nieliniowa praca układu regulacji.

2.5. Analiza układu automatycznie regulującego obiekt całkujący rzeczywisty

Jeżeli transmitancję obiektu całkującego rzeczywistego i regulatora PID określają wzory:

$$K_O(s) = \frac{k_O}{s \cdot Tc \cdot (1 + s \cdot T_1) \cdot (1 + s \cdot T_2) \cdots (1 + s \cdot T_N)}, \tag{2.5.1}$$

$$K_R(s) = \frac{k_R \cdot (1 + s \cdot T_R) \cdot (1 + s \cdot T_V)}{s \cdot T_V}, \tag{2.5.2}$$

to transmitancja otwartego układu regulacji zgodnie ze wzorem (2.2.3), w którym zastosowano kompensację największej inercji obiektu (tzn., że $T_V = T_1$ oraz $T_R = T_2$ – wykonujemy postulat niezwłocznego ustalania zadanej wartości sygnału wyjściowego), wynosi:

$$K_{zo}(s) = \frac{k_O \cdot k_R}{s^2 \cdot T_C \cdot T_1 \cdot (1 + s \cdot T_3) \cdots (1 + s \cdot T_N)}. \tag{2.5.3}$$

Na podstawie wzoru (2.2.4) transmitancja układu regulacji rzeczywistego obiektu całkującego z regulatorem PID, który kompensuje działanie dwóch inercyjnych składników modelu obiektu regulacji, ma postać:

$$K_Y(s) = \frac{k_O \cdot k_R}{k_o \cdot k_R + s^2 \cdot T_C \cdot T_1 \cdot (1 + s \cdot T_3) \cdots (1 + s \cdot T_N)}. \tag{2.5.4}$$

Układ regulacji opisany transmitancją (2.5.4) jest stabilny, jeżeli pierwiastki równania charakterystycznego tej transmitancji mają część rzeczywistą ujemną.

Według pierwszej części kryterium Hurwitz'a powyższy warunek jest spełniony, kiedy wszystkie współczynniki charakterystycznego równania mianownika transmitancji istnieją i są większe od zera. W analizowanym przykładzie modelu układu regulacji (wzór 2.5.4) współczynnik operatora $\mathbf{s^1}$ w mianowniku transmitancji nie istnieje (jest równy zero), co oznacza, że układ regulacji jest niestabilny.

Wniosek

W technicznej realizacji układu automatycznie regulującego obiekt całkujący rzeczywisty – modelowany jako szeregowe połączenie obiektu całkującego z obiektem inercyjnym pierwszego, drugiego lub wyższego rzędu, który współpracuje z regulatorem PID – nie można zastosować kompensacji działania dwóch inercyjnych składników obiektu regulacji.

Mówiąc o kompensacji inercji jako metodzie przyspieszającej proces ustalania sygnału wyjściowego w obiekcie regulowanym, należy zapytać, czy można w przypadku obiektu całkującego rzeczywistego skompensować działanie inercyjne tylko jednego składnika modelu obiektu. Transmitancja regulatora PID (wzór 2.5.2) wskazuje, że kompensację największego ($T_1>T_2>....T_N$) inercyjnego działania jednego składnika obiektu regulacji można wykonać za pomocą całkującego działania regulatora, wówczas $T_V = T_1$, lub różniczkującego działania regulatora, wówczas $T_R = T_1$.

Dla przypadku kompensacji inercyjnego działania jednego składnika modelu rzeczywistego obiektu całkującego za pomocą całkującego działania regulatora PID na podstawie wzorów (2.2.3) i (2.2.4) otrzymujemy:

$$K_{zo}(s) = \frac{k_O \cdot k_R \cdot (1 + s \cdot T_R)}{s^2 \cdot T_C \cdot T_1 \cdot (1 + s \cdot T_2) \cdots (1 + s \cdot T_N)}, \tag{2.5.5}$$

$$K_Y(s) = \frac{k_O \cdot k_R \cdot (1 + s \cdot T_R)}{k_O \cdot k_R + s \cdot k_O \cdot k_R \cdot T_R + s^2 \cdot T_1 \cdot T_C \cdot (1 + s \cdot T_2) \cdots (1 + s \cdot T_N)}. \tag{2.5.6}$$

Dla przypadku kompensacji inercyjnego działania jednego składnika modelu rzeczywistego obiektu całkującego za pomocą różniczkującego działania regulatora PID na podstawie wzorów (2.2.3) i (2.2.4) otrzymujemy:

$$K_{zo}(s) = \frac{k_O \cdot k_R \cdot (1 + s \cdot T_V)}{s^2 \cdot T_C \cdot T_V \cdot (1 + s \cdot T_2) \cdots (1 + s \cdot T_N)}, \tag{2.5.7}$$

$$K_Y(s) = \frac{k_O \cdot k_R \cdot (1 + s \cdot T_V)}{k_O \cdot k_R + s \cdot k_O \cdot k_R \cdot T_V + s^2 \cdot T_V \cdot T_C \cdot (1 + s \cdot T_2) \cdots (1 + s \cdot T_N)}. \tag{2.5.8}$$

Współczynniki równań charakterystycznych dla transmitancji (2.5.6) i (2.5.8) istnieją i są dodatnie (stałe czasowe obiektów – zawsze są dodatnie), czyli układy regulacji rzeczywistego obiektu całkującego z regulatorem PID kompensującym działanie inercyjne jednego składnika modelu obiektu regulacji mogą (ale nie koniecznie) być stabilne.

Przykład 1.

Transmitancję zastępczą $K_Y(s)$ układu regulacji rzeczywistego obiektu całkującego z regulatorem PID, który kompensuje inercyjne działanie jednego składnika modelu obiektu regulacji (zakładamy $T_V = T_1$, kompensacja za pomocą całkującego działania regulatora PID) na podstawie wzoru (2.5.6) dla N = 2 określa wyrażenie:

$$K_Y(s) = \frac{k_O \cdot k_R \cdot (1 + s \cdot T_R)}{k_O \cdot k_R + s \cdot k_O \cdot k_R \cdot T_R + s^2 \cdot T_1 \cdot T_C \cdot (1 + s \cdot T_2)} \tag{2.5.9a}$$

lub

$$K_Y(s) = \frac{1 + s \cdot T_R}{1 + s \cdot T_R + s^2 \cdot \frac{T_1 \cdot T_C}{k_O \cdot k_R} + s^3 \cdot \frac{T_1 \cdot T_C}{k_O \cdot k_R} \cdot T_2} = \frac{b_0 + s \cdot b_1}{a_0 + s \cdot a_1 + s^2 \cdot a_2 + s^3 \cdot a_3} . \tag{2.5.9b}$$

Wzmocnienie k_R i stałą czasową różniczkowania T_R regulatora wyznaczymy na podstawie postulatu niezwłocznego działania układu regulacji. Podobnie jak w rozdziale 2.4 dla obiektu inercyjnego wyższego rzędu, postulujemy, by moduł transmitancji układu regulacji był constans i równy 1 w możliwie dużym przedziale częstotliwości, praktycznie od zera do częstotliwości granicznej.

Dla transmitancji (2.5.9b), w której podstawiamy $s = i \cdot \omega$, wartość modułu określa wyrażenie:

$$\left|K_Y(\omega)\right| = \sqrt{\frac{b_0 + \omega^2 \cdot b_1}{a_0^2 - \omega^2 \cdot (2 \cdot a_0 \cdot a_2 - a_1^2) - \omega^4 \cdot (2 \cdot a_1 \cdot a_3 - a_2^2) + \omega^6 \cdot a_3^2}} . \tag{2.5.10}$$

Przybliżone rozwiązanie postulowanych parametrów regulatora określa podwójny warunek

$$\begin{aligned} 2 \cdot a_0 \cdot a_2 - a_1^2 &= 0 , \\ 2 \cdot a_1 \cdot a_3 - a_2^2 &= 0 . \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Porównując lewą i prawą stronę wyrażenia (2.6.2b), wyznaczamy:

$$a_0 = 1 , \qquad b_0 = 1 , \qquad a_1 = T_R , \qquad a_2 = \frac{T_1 \cdot T_C}{k_O \cdot k_R} , \qquad a_3 = \frac{T_1 \cdot T_C}{k_O \cdot k_R} \cdot T_2 .$$

Wzmocnienie i stałą czasową różniczkowania regulatora na podstawie warunku (2.5.11) określają wzory:

$$k_R = \frac{T_1 \cdot T_C}{8 \cdot T_2^2 \cdot k_O} , \qquad T_R = 4 \cdot T_2 , \qquad T_V = T_1 \cdot \tag{2.5.12}$$

Transmitancja układu regulacji po optymalizacji parametrów regulatora PID wynosi:

$$K_Y(s) = \frac{1 + 4 \cdot T_2 \cdot s}{1 + 4 \cdot T_2 \cdot s + 8 \cdot T_2^2 \cdot s^2 + 8 \cdot T_2^3 \cdot s^3} . \tag{2.5.13}$$

Na podstawie kryterium Hurwitz'a układ regulacji modelowany transmitancją (2.5.13) jest stabilny, kiedy współczynniki wielomianu mianownika tej transmitancji są dodatnie (stałe czasowe są zawsze dodatnie) i jest spełniony warunek:

$$\Delta_2 = a_2 \cdot a_1 - a_3 \cdot a_0 = (8 \cdot T_2^2 \cdot 4 \cdot T_2 - 8 \cdot T_2^3 \cdot 1) \rangle 0 .$$

```
```

Przykład 2.

Transmitancję zastępczą $K_Y(s)$ układu regulacji rzeczywistego obiektu całkującego z regulatorem PID, który kompensuje inercyjne działanie jednego składnika modelu obiektu regulacji (zakładamy $T_R = T_1$, kompensacja za pomocą różniczkującego działania regulatora PID) określa na podstawie wzoru (2.5.8) dla N = 2 wyrażenie:

$$K_Y(s) = \frac{k_O \cdot k_R \cdot (1 + s \cdot T_V)}{k_O \cdot k_R + s \cdot k_O \cdot k_R \cdot T_V + s^2 \cdot T_V \cdot T_C \cdot (1 + s \cdot T_2)} \tag{2.5.14a}$$

lub

$$K_Y(s) = \frac{1 + s \cdot T_V}{1 + s \cdot T_V + s^2 \cdot \frac{T_V \cdot T_C}{k_O \cdot k_R} + s^3 \cdot \frac{T_V \cdot T_C}{k_O \cdot k_R} \cdot T_2} = \frac{b_0 + s \cdot b_1}{a_0 + s \cdot a_1 + s^2 \cdot a_2 + s^3 \cdot a_3} . \tag{2.5.14b}$$

Porównując lewą i prawą stronę wyrażenia (2.5.14b), wyznaczamy:

$$a_0 = 1, \qquad b_0 = 1, \qquad a_1 = T_V, \qquad a_2 = \frac{T_V \cdot T_C}{k_O \cdot k_R}, \qquad a_3 = \frac{T_V \cdot T_C}{k_O \cdot k_R} \cdot T_2 .$$

Podobnie jak w przykładzie 1 z warunku (2.5.11) wyznaczamy przybliżoną wartości wzmocnienia k_R i stałą czasową całkowania T_V.
Wzmocnienie i stałą czasową różniczkowania regulatora określają wzory:

$$k_R = \frac{T_C}{2 \cdot T_2 \cdot k_O}, \qquad T_V = 4 \cdot T_2, \qquad T_R = T_1 . \tag{2.5.15}$$

Transmitancję układu regulacji po optymalizacji parametrów regulatora PID określa wyrażenie:

$$K_Y(s) = \frac{1 + 4 \cdot T_2 \cdot s}{1 + 4 \cdot T_2 \cdot s + 8 \cdot T_2^2 \cdot s^2 + 8 \cdot T_2^3 \cdot s^3} . \tag{2.5.16}$$

Układ regulacji modelowany wzorem (2.5.16) jest stabilny (zob. przykład 1).

Wniosek

Zastosowanie tego samego kryterium do optymalizacji parametrów układu regulacji, nawet w przypadkach stosowania różnych zasad kompensacji inercji obiektu regulacji przez regulator – wzory (2.5.13) i (2.5.16) w przykładach 1 i 2 dla rzeczywistego obiektu całkującego – może prowadzić do takich samych wyników końcowych. Uzupełnieniem tego wniosku są analizy przedstawione w przykładach 3 i 4.

Przykład 3.

Jeżeli transmitancję $K_O(s)$ obiektu całkującego rzeczywistego i transmitancje $K_R(s)$ regulatora PI określają wzory:

$$K_O(s) = \frac{k_O}{s \cdot Tc \cdot (1 + s \cdot T_1) \cdot (1 + s \cdot T_2) \cdots (1 + s \cdot T_N)} , \tag{2.5.17}$$

$$K_R(s) = \frac{k_R \cdot (1 + s \cdot T_V)}{s \cdot T_V}, \tag{2.5.18}$$

to transmitancja otwartego układu regulacji jw. zgodnie ze wzorem (2.2.3), w którym zastosowano kompensację największej inercji obiektu (tzn., że $T_V = T_1$), wynosi:

$$K_{zo}(s) = \frac{k_O \cdot k_R}{s^2 \cdot T_C \cdot T_1 \cdot (1 + s \cdot T_2) \cdots (1 + s \cdot T_N)}. \tag{2.5.19}$$

Na podstawie wzoru (2.2.4) transmitancja układu regulacji z rzeczywistym obiektem całkującym i regulatorem PI, który kompensuje działanie inercyjnego jednego składnika modelu obiektu regulacji, ma postać:

$$K_Y(s) = \frac{k_O \cdot k_R}{k_o \cdot k_R + s^2 \cdot T_C \cdot T_1 \cdot (1 + s \cdot T_2) \cdots (1 + s \cdot T_N)}. \tag{2.5.20}$$

Układ regulacji opisany wzorem (2.5.20), podobnie jak układ regulacji opisany wzorem (2.5.4), jest niestabilny.

Przykład 4.

Jeżeli transmitancję $K_O(s)$ obiektu całkującego rzeczywistego i transmitancje $K_R(s)$ regulatora PD określają wzory:

$$K_O(s) = \frac{k_O}{s \cdot Tc \cdot (1 + s \cdot T_1) \cdot (1 + s \cdot T_2) \cdots (1 + s \cdot T_N)}, \tag{2.5.21}$$

$$K_R(s) = k_R \cdot (1 + s \cdot T_R), \tag{1.5.22}$$

to transmitancja otwartego układu regulacji zgodnie ze wzorem (2.2.3), w którym zastosowano kompensację największej inercji obiektu (tzn., że $T_R = T_1$), wynosi:

$$K_{zo}(s) = \frac{k_O \cdot k_R}{s \cdot T_C \cdot (1 + s \cdot T_2) \cdots (1 + s \cdot T_N)}. \tag{2.5.23}$$

Na podstawie wzoru (2.2.4) transmitancja układu regulacji rzeczywistego obiektu całkującego i regulatora PD, który kompensuje działanie inercyjnego jednego składnika modelu obiektu regulacji, ma postać:

$$K_Y(s) = \frac{k_O \cdot k_R}{k_o \cdot k_R + s \cdot T_C \cdot (1 + s \cdot T_2) \cdots (1 + s \cdot T_N)}. \tag{2.5.24}$$

Układ regulacji opisany wzorem (2.5.24), podobnie jak układy regulacji modelowane wzorami (2.5.6) i (2.5.8), może być stabilny.

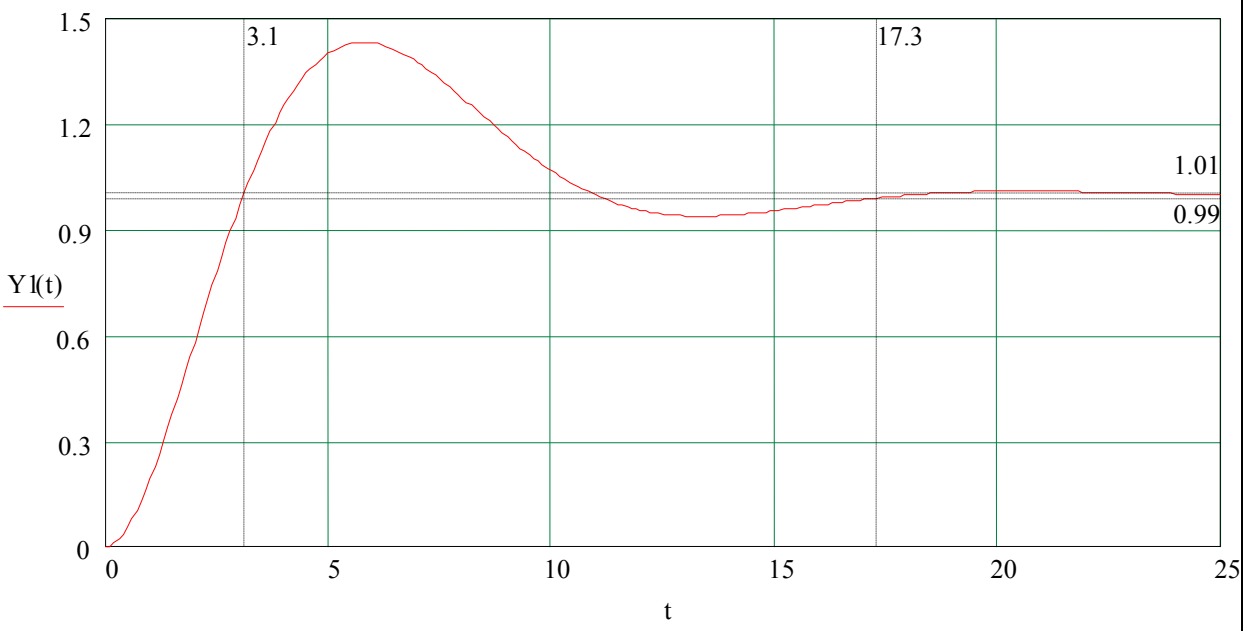
Przebieg zmian wyjściowego sygnału przedstawiony na rysunku 2.5.1 dla rzeczywistego obiektu całkującego w układzie regulacji z regulatorem PID charakteryzują następujące parametry: przeregulowanie P = 43%, czas regulacji $tr = 17.3 \cdot T_2$. Dla przedziału tolerancji Br = 1% czas narastania sygnału wyjściowego wynosi $tn = 3.1 \cdot T_2$. Otrzymany przebieg sygnału wyjściowego dla większości praktycznych zastosowań uznaje się za niezadowalający.

Uwzględniając początkową niestabilności układu regulacji, która została wywołana przez regulator kompensujący inercyjne działanie składników modelu obiektu regulacji, należy uznać otrzymany wynik za pozytywny wstęp do dalszej analizy procesów zachodzących w układach regulacji.

```
```

Tabela 2.5.1.

(okno robocze programu Mathcad) *– w polu tekstowym wpisz temat:*	*Komentarz:*
Charakterystyka czasowa układu regulującego rzeczywisty obiekt całkujący, regulator PID $K(s) = \frac{1 + 4 \cdot T_2 \cdot s}{1 + 4 \cdot T_2 \cdot s + 8 \cdot T_2^2 \cdot s^2 + 8 \cdot T_2^3 \cdot s^3}$ $\frac{1}{s} \cdot \frac{1 + 4 \cdot T2 \cdot s}{1 + 4 \cdot T2 \cdot s + 8 T2^2 \cdot s^2 + 8 \cdot T2^3 \cdot s^3}$ $t := 0, 0.1 .. 25 \qquad T2 := 1.0001$ $Y1(t) := e^{-\frac{t}{2 \cdot T2}} - 2 \cdot e^{-\frac{t}{4 \cdot T2}} \cdot \cosh\left(\frac{\sqrt{3} \cdot t \cdot \sqrt{-\frac{1}{T2^2}}}{4}\right) + 1$	Tc = 10 Układ regulacji po optymalizacji nastaw regulatora, transmitancja określona przez wzór (2.5.16) *– wpisz transformatę sygnału wyjściowego w układzie regulacji* *– oblicz odwrotną transformatę Laplace'a dla sygnału wyjściowego* *– określ sygnał wyjściowy Y1(t):=*



Rys. 2.5.1. Sygnał wyjściowy obiektu całkującego rzeczywistego w układzie z regulatorem PID po optymalizacji nastaw regulatora

Przykład 5.

Jeżeli transmitancję obiektu całkującego i regulatora PD określają wzory (2.5.21) i (2.5.22), to dla N = 2 transmitancje zastępcze: $K_Y(s)$ – (wzór 2.5.24), $K_X(s)$ – (wzór 2.2.5), $K_E(s)$ – (wzór 2.2.6) układu regulacji rzeczywistego obiektu całkującego i regulatora PD, który kompensuje działanie inercyjnego jednego składnika modelu obiektu regulacji, zestawiono w tabeli 2.5.2.

Tabela 2.5.2.

(okno robocze programu Mathcad) – polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyka czasowa układu regulującego rzeczywisty obiekt całkujący, regulator PD $\frac{1}{s}\cdot\frac{ko\cdot kr}{ko\cdot kr + s\cdot Tc + s^2\cdot Tc\cdot T2}$ $\frac{1}{s}\cdot\frac{s\cdot Tc + s^2\cdot Tc\cdot T2}{ko\cdot kr + s\cdot Tc + s^2\cdot Tc\cdot T2}$ $\frac{1}{s}\cdot\frac{kr\cdot s\cdot Tc\cdot(1+s\cdot Tr)(1+s\cdot T2)}{ko\cdot kr + s\cdot Tc + s^2\cdot Tc\cdot T2}$	$K_Y(s)=\frac{k_O\cdot k_R}{k_o\cdot k_R + s\cdot T_C + s^2\cdot T_C\cdot T_2}$ $K_E(s)=\frac{s\cdot T_C + s^2\cdot T_C\cdot T_2}{k_o\cdot k_R + s\cdot T_C + s^2\cdot T_C\cdot T_2}$ $K_X(s)=\frac{s\cdot T_C\cdot kr\cdot(1+s\cdot T_R)\cdot(1+s\cdot T_2)}{k_o\cdot k_R + s\cdot T_C + s^2\cdot T_C\cdot T_2}$ *– wpisz transformaty sygnałów: Y – obiektu regulacji, E – błędu regulacji, X – regulatora dla sygnału sterującego:* $yo = \frac{1}{s}$ *– oblicz odwrotne transformaty Laplace'a dla ww. sygnałów* *– wpisz parametry i zmienne obliczeń* *– określ sygnały: Y(t) – obiektu regulacji E(t) – błędu regulacji, X(t) – regulatora jako funkcje czasu i wzmocnienia regulatora*

$\Delta(t) := 0 \quad t := 0, 0.1 .. 10 \quad kr := 4, 8 .. 12 \quad Tc := 10 \quad T1 := 1 \quad Tr := 1 \quad T2 := 0.5 \quad ko := 1$

$$Y(t, kr) := -\frac{e^{-\frac{t}{2\cdot T2}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{Tc - 4\cdot T2\cdot ko\cdot kr}{T2^2\cdot Tc}}}{2}\right) - T2\cdot\sqrt{\frac{Tc - 4\cdot T2\cdot ko\cdot kr}{T2^2\cdot Tc}} \ldots + T2\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T2}}\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{Tc - 4\cdot T2\cdot ko\cdot kr}{T2^2\cdot Tc}}}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{Tc - 4\cdot T2\cdot ko\cdot kr}{T2^2\cdot Tc}}}{T2\cdot\sqrt{\frac{Tc - 4\cdot T2\cdot ko\cdot kr}{T2^2\cdot Tc}}}$$

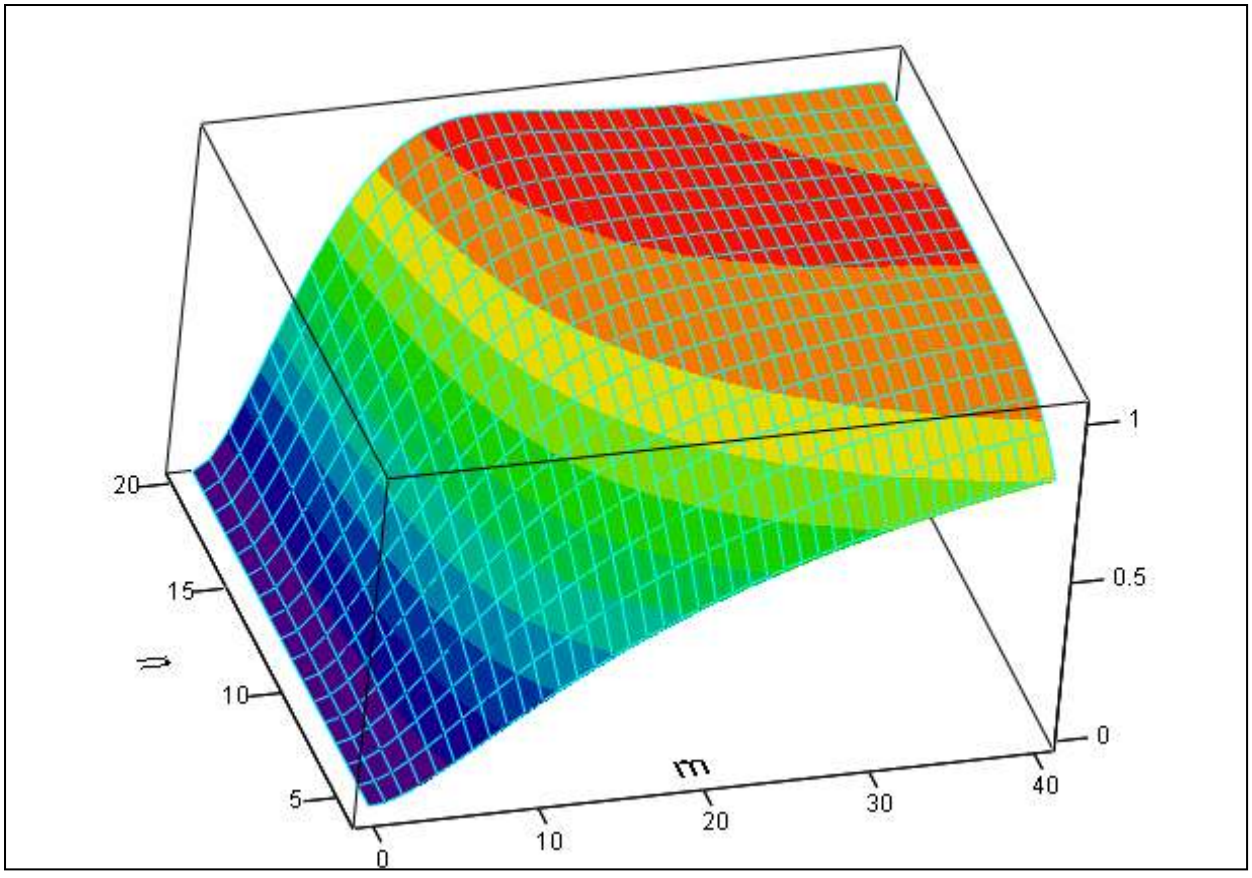
$Y_{m,n} := Y(t_m, kr_n)$

$$E(t, kr) := \frac{e^{-\frac{t}{2\cdot T2}}\cdot\left(\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{Tc - 4\cdot T2\cdot ko\cdot kr}{T2^2\cdot Tc}}}{2}\right) \ldots + T2\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{\frac{Tc - 4\cdot T2\cdot ko\cdot kr}{T2^2\cdot Tc}}}{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{Tc - 4\cdot T2\cdot ko\cdot kr}{T2^2\cdot Tc}}\right)}{T2\cdot\sqrt{\frac{Tc - 4\cdot T2\cdot ko\cdot kr}{T2^2\cdot Tc}}}$$

$E_{m,n} := E(t_m, kr_n)$

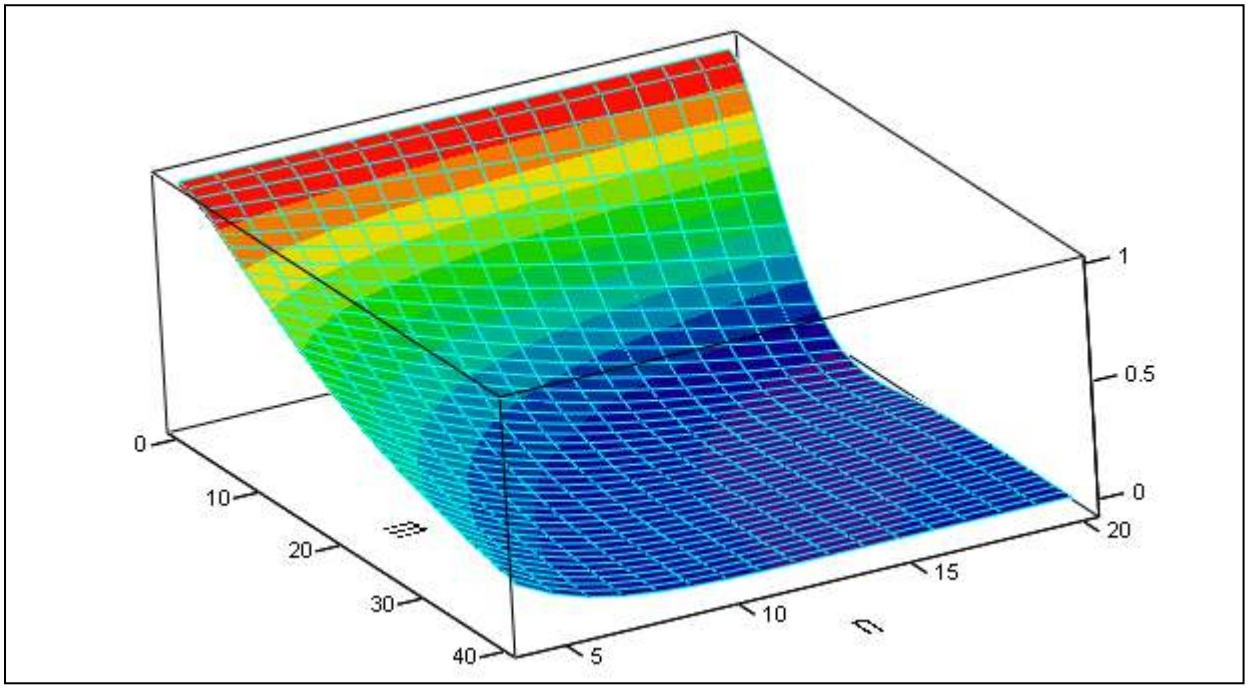
$$X(t, kr) := \frac{\begin{aligned} &Tc \cdot kr \cdot e^{-\frac{t}{2 \cdot T2}} \cdot \sinh\left(t \cdot \sqrt{\frac{Tc - 4 \cdot T2 \cdot ko \cdot kr}{4 \cdot T2^2 \cdot Tc}} \right) \dots \\ &+ \left(-2 \cdot Tr \cdot ko \cdot kr^2 \cdot e^{-\frac{t}{2 \cdot T2}} \cdot \sinh\left(t \cdot \sqrt{\frac{Tc - 4 \cdot T2 \cdot ko \cdot kr}{4 \cdot T2^2 \cdot Tc}} \right) \right) \dots \\ &+ 2 \cdot T2 \cdot Tc \cdot Tr \cdot kr \cdot \Delta(t) \cdot \sqrt{\frac{Tc - 4 \cdot T2 \cdot ko \cdot kr}{4 \cdot T2^2 \cdot Tc}} \dots \\ &+ 2 \cdot T2 \cdot Tc \cdot kr \cdot e^{-\frac{t}{2 \cdot T2}} \cdot \cosh\left(t \cdot \sqrt{\frac{Tc - 4 \cdot T2 \cdot ko \cdot kr}{4 \cdot T2^2 \cdot Tc}} \right) \cdot \sqrt{\frac{Tc - 4 \cdot T2 \cdot ko \cdot kr}{4 \cdot T2^2 \cdot Tc}} \end{aligned}}{T2 \cdot Tc \cdot \sqrt{\frac{Tc - 4 \cdot T2 \cdot ko \cdot kr}{T2^2 \cdot Tc}}}$$

$$X_{m,n} := X(t_m, kr_n)$$



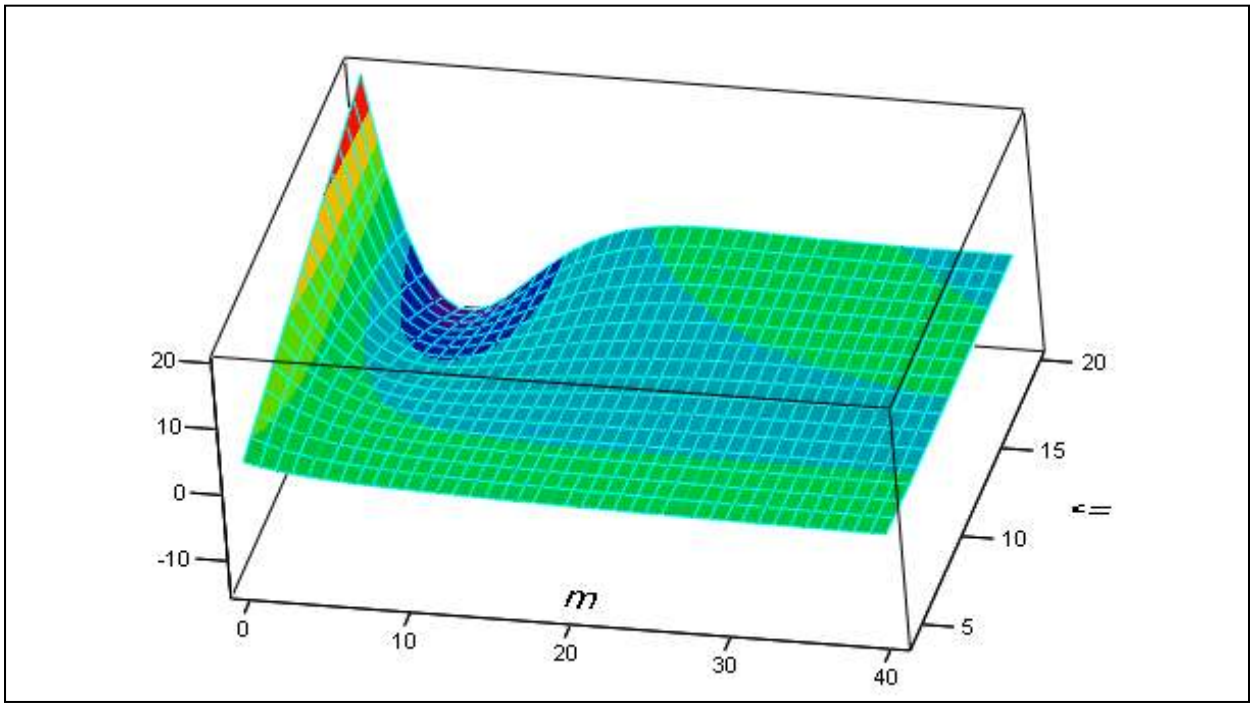
Y

Rys. 2.5.2. Zestawienie charakterystyk czasowych obiektu całkującego rzeczywistego, praca z regulatorem PD dla: kr ∈ (4, 20), $T_C = 10$, $T_1 = 1$, $T_R = 1$, $T_2 = 0.5$, ko = 1



E

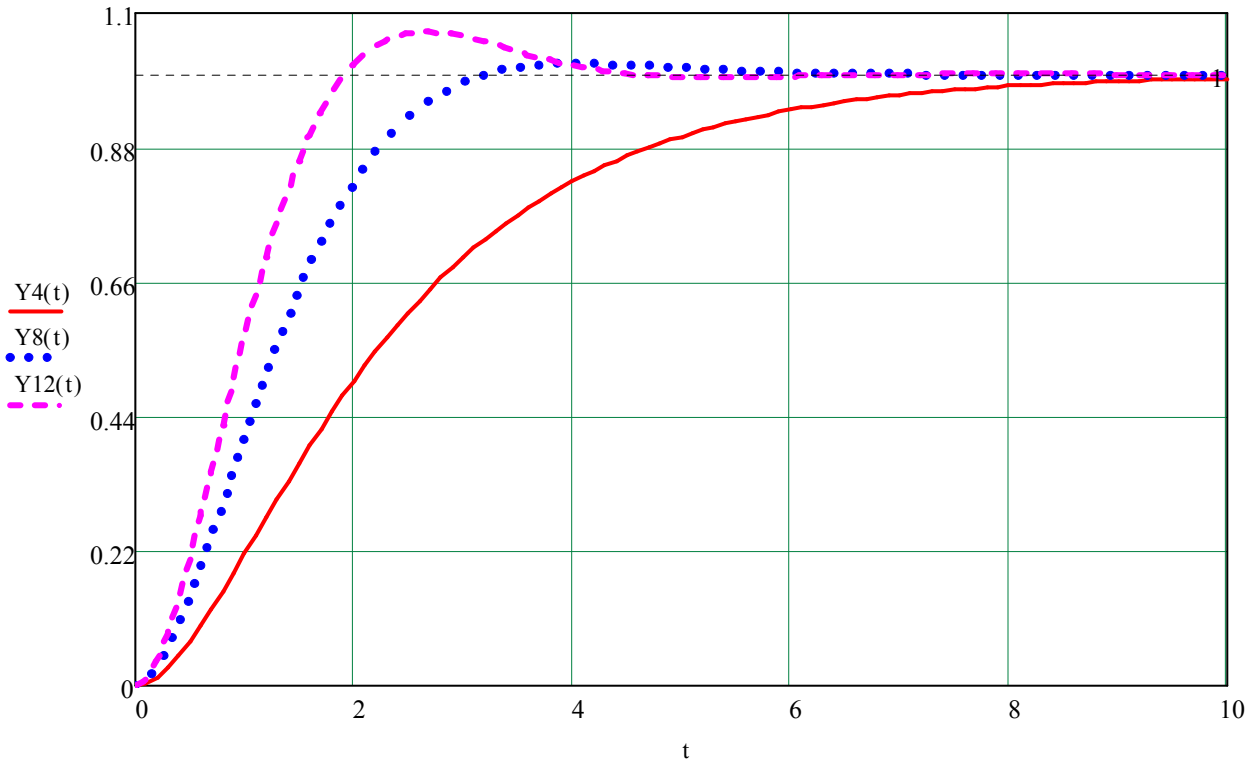
Rys. 2.5.3. Zestawienie charakterystyk czasowych sygnału błędu regulacji obiektu całkującego rzeczywistego, praca z regulatorem PD dla: kr ∈ (4, 20), $T_C = 10$, $T_1 = 1$, $T_R = 1$, $T_2 = 0.5$, ko = 1



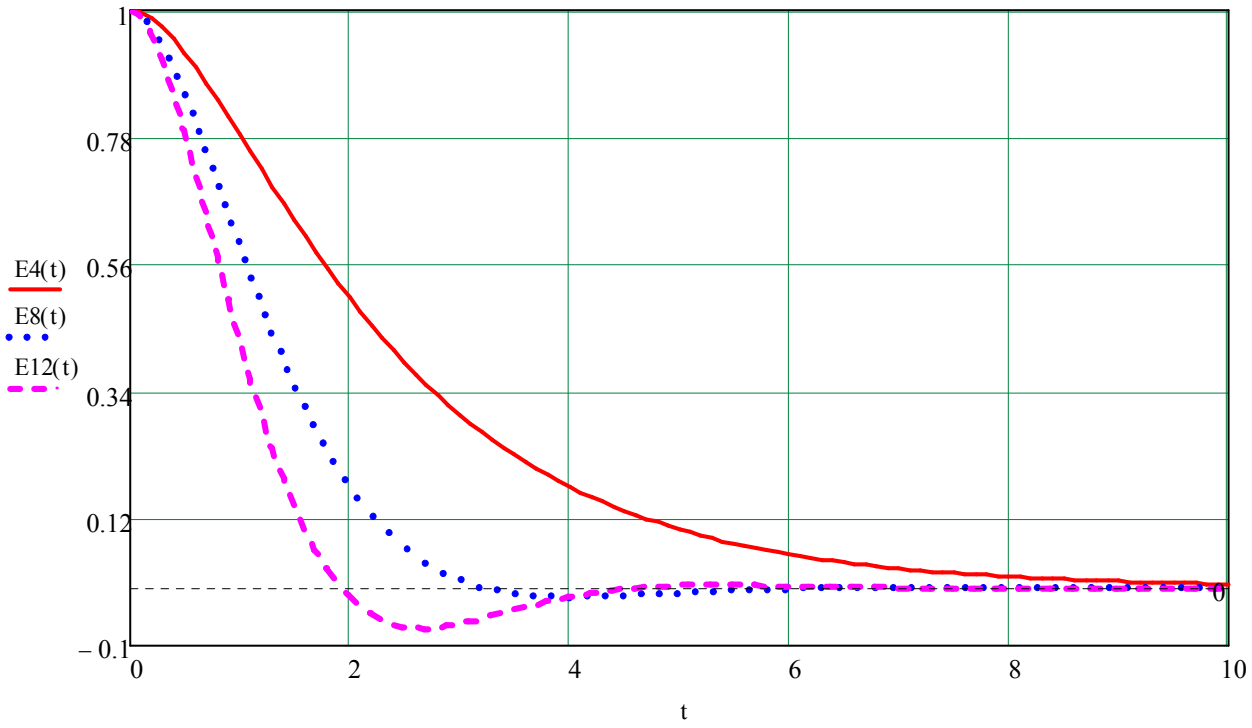
X

Rys. 2.5.4. Zestawienie charakterystyk czasowych regulatora PD sterującego rzeczywistym obiektem całkującym dla: kr ∈ (4, 20), $T_C = 10$, $T_1 = 1$, $T_R = 1$, $T_2 = 0.5$, ko = 1

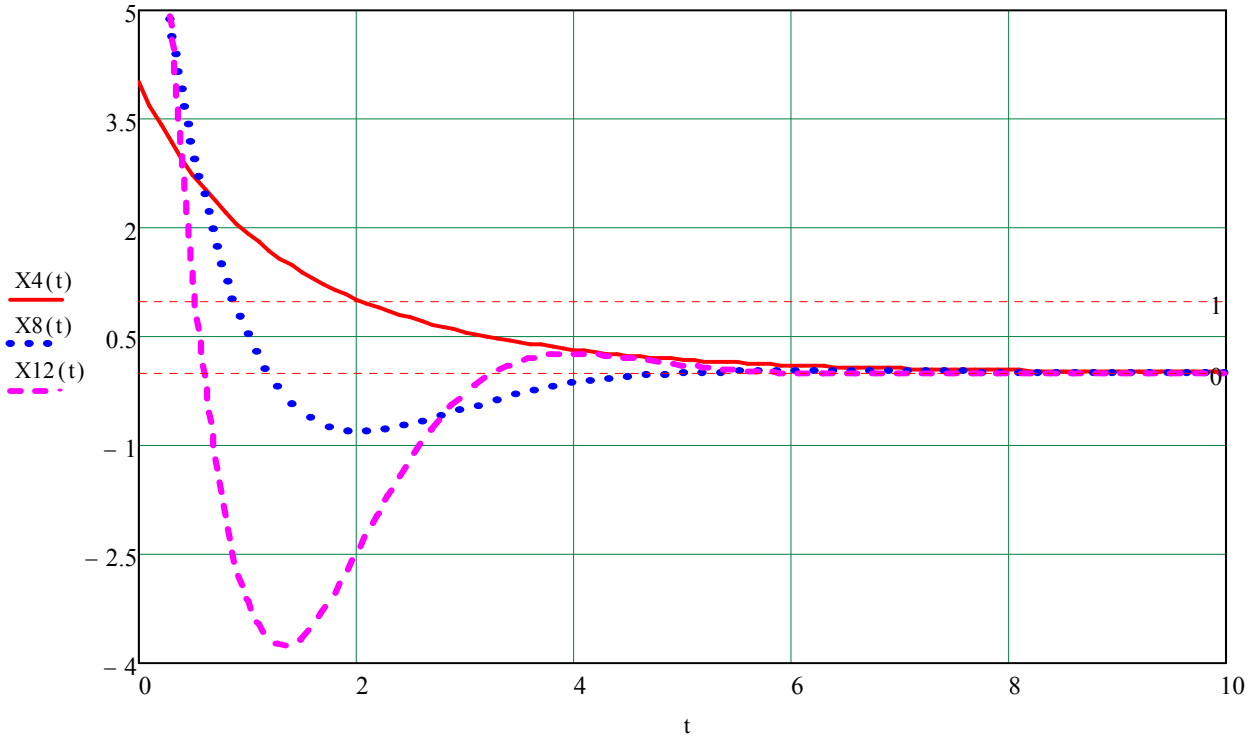
```
```



Rys. 2.5.6. Zestawienie charakterystyk czasowych obiektu całkującego rzeczywistego, praca z regulatorem PD dla: kr = 4, 8, 12, T_C = 10, T_1 = 1, T_R = 1, T_2 = 0.5, ko = 1



Rys. 2.5.7. Zestawienie charakterystyk czasowych sygnału błędu regulacji obiektu całkującego rzeczywistego, praca z regulatorem PD dla: kr = 4, 8, 12, T_C = 10, T_1 = 1, T_R = 1, T_2 = 0.5, ko = 1



Rys. 2.5.8. Zestawienie charakterystyk czasowych regulatora PD sterującego rzeczywistym obiektem całkującym dla: kr = 4, 8, 12, T_C = 10, T_1 = 1, T_R = 1, T_2 = 0.5, ko = 1

Podsumowanie

Na podstawie porównania charakterystyk układu regulacji obiektu całkującego z regulatorem PID (zob. rys. 2.5.1) z charakterystykami układu regulacji tego samego obiektu, ale z regulatorem PD (zob. rys. 2.5.6), widzimy możliwość zmniejszenia wartości przeregulowania – praktycznie do zera, znaczne skrócenie czasu regulacji. Dokładniejsza analiza pracy rzeczywistego obiektu całkującego z regulatorem PID wskazuje, że jest możliwe zmniejszenie wartości przeregulowania w takim układzie regulacji. Zmniejszenie wartości przeregulowania uzyskane dla innego zestawu parametrów regulatora PID zwiększa jednocześnie czas regulacji. Znany jest inny skuteczny sposób zmniejszenia przeregulowania i czasu regulacji, nie tylko rzeczywistego obiektu całkującego z regulatorem PID (zob. rozdział 2.8), ale i innych złożonych obiektów regulacji, stosowany przede wszystkim w systemach rozruchowej pracy obiektów.

2.6. Badanie stabilności układu automatycznie regulującego obiekt inercyjny

Układ automatycznej regulacji uważamy za stabilny, jeżeli wytrącony z równowagi przez zaburzenie rozumiane jako zmiana warunków pracy (zmiana sygnału sterującego, zmiana zasilania…) potrafi po zaniku zaburzenia powrócić do stanu równowagi. Stabilności układu regulacji określa (jak już wspomniano w rozdziale 2.5) równanie charakterystyczne mianownika jego transmitancji.

Nie jest ważne, którą z trzech możliwych transmitancji układu regulacji będziemy analizować, ponieważ transmitancje utworzone dla wyjść Y, X, E (wzory: 2.2.4, 2.2.5, 2.2.6) mają taki sam mianownik:

$$K_Y(s)=\frac{K_O(s)\cdot K_R(s)}{1+K_O(s)\cdot K_R(s)},\quad K_X(s)=\frac{K_R(s)}{1+K_O(s)\cdot K_R(s)},\quad K_E(s)=\frac{1}{1+K_O(s)\cdot K_R(s)}.$$

Równanie charakterystyczne mianownika transmitancji układu regulacji określa wzór:

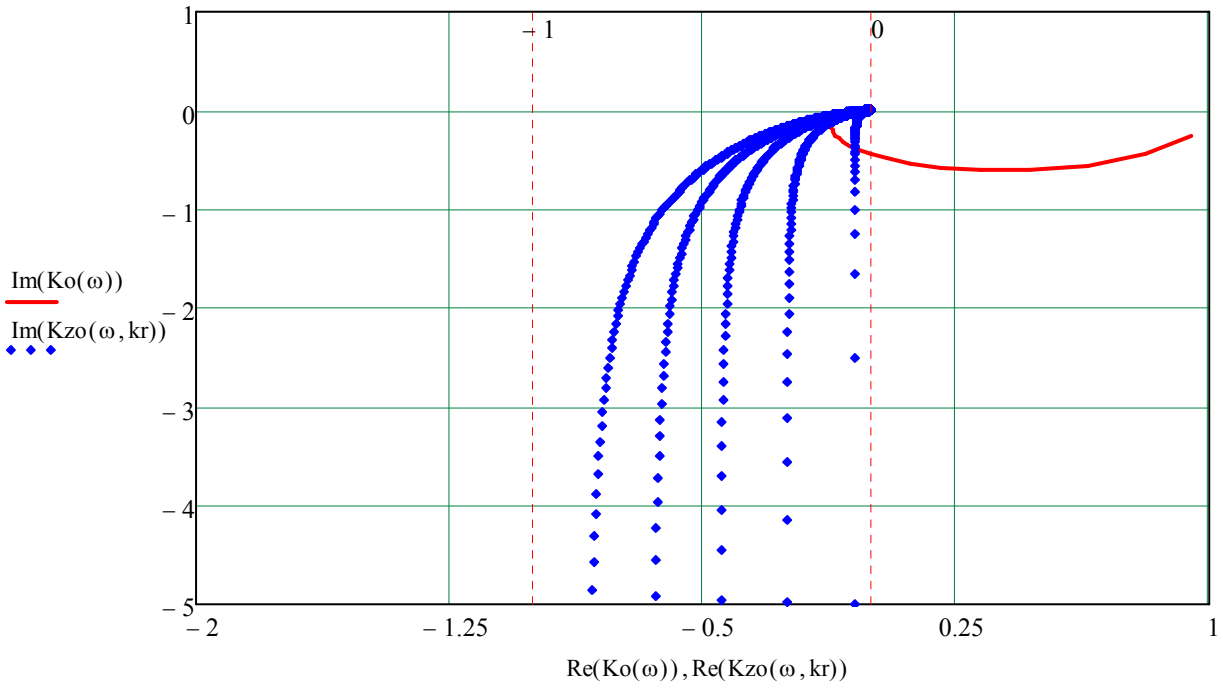
$$1+K_O(s)\cdot K_R(s)=0. \tag{2.6.1}$$

Warunkiem wystarczającym i koniecznym stabilności układu regulacji jest, by części rzeczywiste wszystkich pierwiastków równania charakterystycznego (2.6.1) były ujemne.

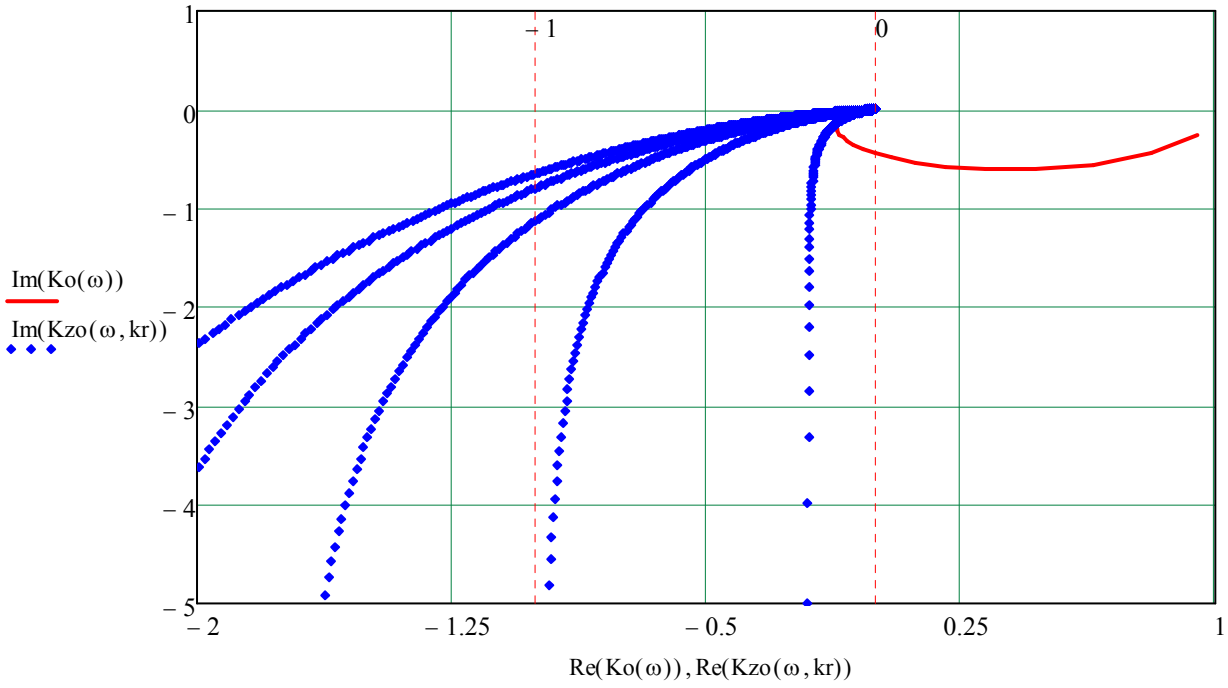
Wszystkie pierwiastki operatorowego równania charakterystycznego (2.6.1) przeniesione (transformowane) na płaszczyznę zespoloną Re[Kzo(j·ω)], Im [Kzo(j·ω)] znajdują się w punkcie (-1, j 0). Dlatego badanie stabilności układu regulacji wykonywane w dziedzinie częstotliwości – zgodnie z kryterium Nyquista, które stanowi, że układ automatycznej regulacji jest stabilny, kiedy charakterystyka częstotliwościowa Kzo(ω) otwartego układu regulacji (inaczej: otwartej pętli regulacji) przy zmianie częstotliwości od **0** do ∞ nie obejmuje punktu (–1, j 0) – polega na wyznaczeniu charakterystyki częstotliwościowej otwartego układu regulacji i sprawdzeniu położenie punktu (–1, j 0).

Tabela 2.6.1.

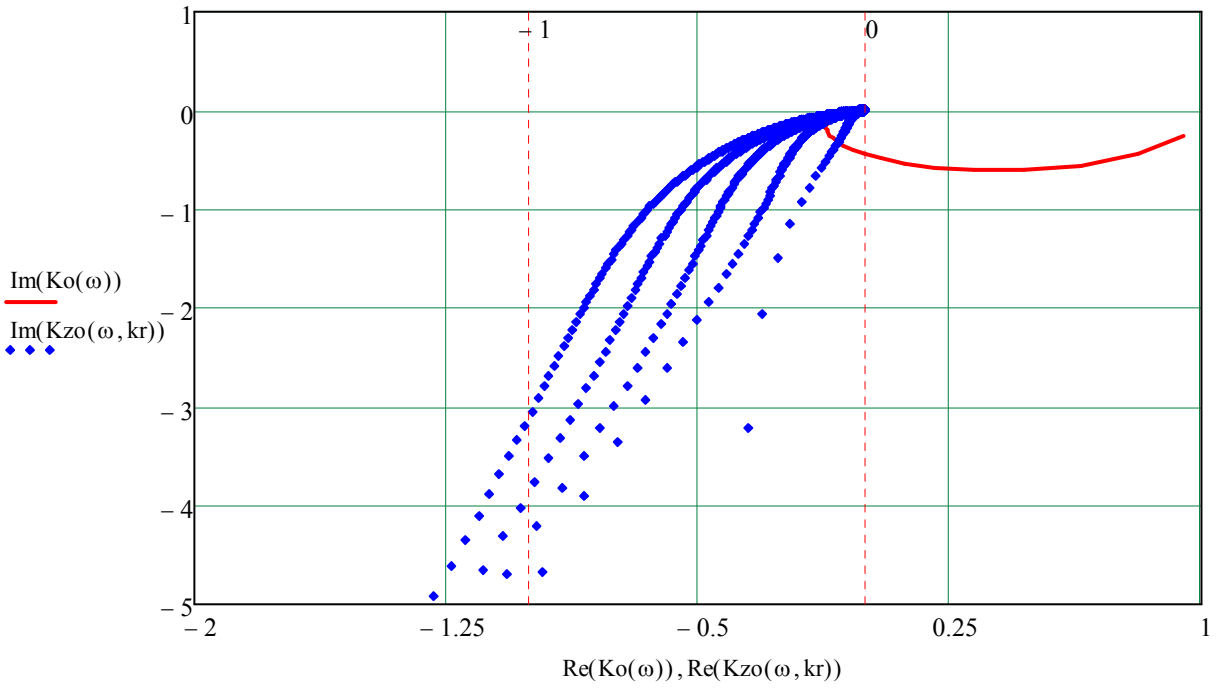
<table>
<tr><td>(okno robocze programu Mathcad)
– w polu tekstowym wpisz temat:</td><td colspan="2">Komentarz:</td></tr>
<tr><td>Charakterystyki częstotliwościowe otwartego układu regulacji obiektu inercyjnego z regulatorem PID – badanie wpływu wzmocnienia regulatora</td><td colspan="2">Badanie stabilności układu automatycznie regulującego obiekt inercyjny.
Obiekt regulacji jako szeregowe połączenie trzech obiektów inercyjnych pierwszego rzędu.
Regulator PID jako szeregowe połączenie regulatora PI i PD.</td></tr>
<tr><td>$i:=\sqrt{-1}\qquad \omega:=0.01,0.02..10$
$T1:=20\quad T2:=5\quad T3:=1\quad ko:=2$
$Tv:=20\quad Tr:=5\quad kr:=1,5..20$</td><td colspan="2">$$Ko(\omega):=\frac{ko}{(1+i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T2)\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T3)}$$
$$Kr(\omega):=\frac{kr\cdot(1+i\cdot\omega\,Tv)\cdot(1+i\cdot\omega\,Tr)}{i\cdot\omega\cdot Tv}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$Kzo(\omega,kr):=\frac{ko}{(1+i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T2)\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T3)}\cdot\frac{kr\cdot(1+i\cdot\omega\,Tv)\cdot(1+i\cdot\omega\,Tr)}{i\cdot\omega\cdot Tv}$$</td><td>Transmitancja otwartej pętli regulacji.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ustalając parametry wykresu w menu: Formatting Currently Selected x–y Plot, wybierz dla Kzo w zakładce Traces, Symbol: ♦, Symbol Weight: p, Line Weight: points.</td></tr>
</table>



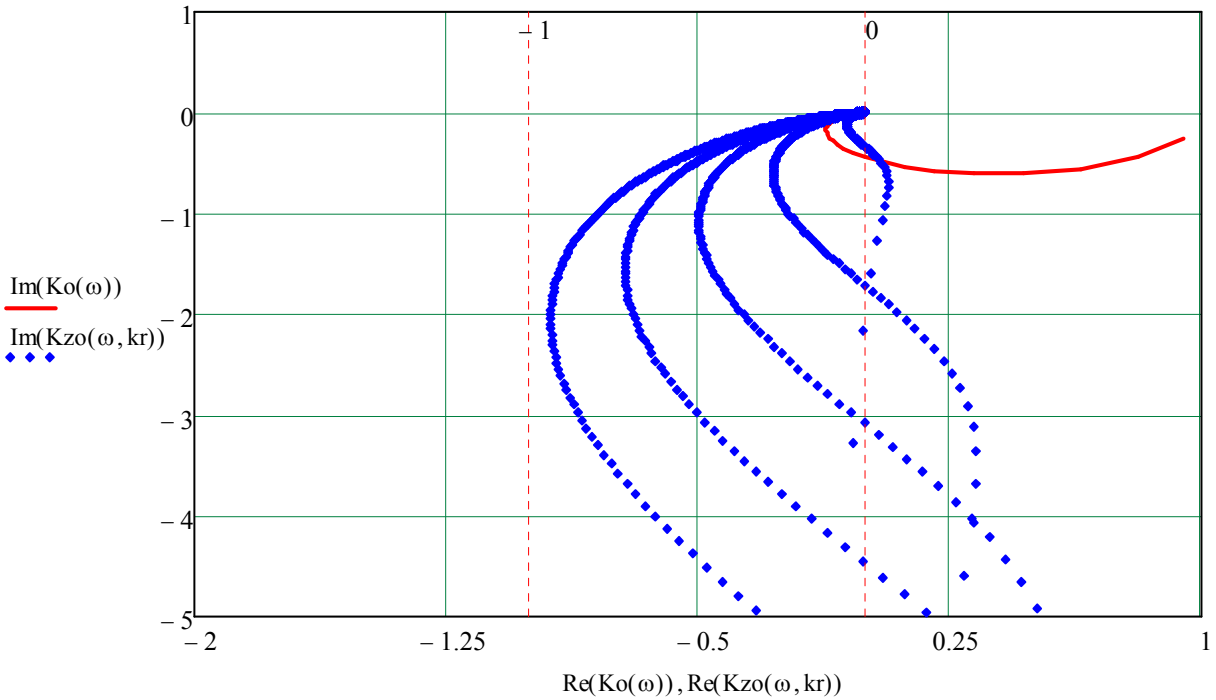
Rys. 2.6.1. Charakterystyki częstotliwościowe otwartego układu regulacji obiektu inercyjnego z regulatorem PID, kompensacja inercji dla: $T_V = T_1$, $T_R = T_2$, $T_3 = 1$, ko = 1, 5, 10, 15, 20



Rys. 2.6.2. Charakterystyki częstotliwościowe otwartego układu regulacji obiektu inercyjnego z regulatorem PID, kompensacja inercji dla: $T_V = T_2 = 5$, $T_R = T_1 = 20$, $T_3 = 1$, ko = 1, 5, 10, 15, 20



Rys. 2.6.3. Charakterystyki częstotliwościowe otwartego układu regulacji obiektu inercyjnego z regulatorem PID dla: $T_V = 0.75$, $T1 = 15$, $T_R = T_2$, $T_3 = 1$, ko = 1, 5, 10, 15, 20



Rys. 2.6.4. Charakterystyki częstotliwościowe otwartego układu regulacji obiektu inercyjnego i regulatora PID dla: $T_V = 0.75$,·$T_1 = 15$, $T_R = 2$,·$T_2 = 10$, $T_3 = 1$, ko = 1, 5, 10, 15, 20

Podsumowanie

Występujące powszechnie w praktyce technicznej zmiany parametrów obiektów regulacji w czasie ich eksploatacji i zastosowane uproszczenia matematycznego modelu obiektu regulacji stanowią realne zagrożenie dla stabilności pracy układu regulacji. Miarą określającą odporność układu regulacji na wpływy zmian parametrów obiektu regulacji jest zapas stabilności, czyli najmniejsza odległość punktu (–1, j 0) od modułu charakterystyki częstotliwościowej otwartego układu regulacji na płaszczyźnie zespolonej Re[Kzo(j·ω)], Im [Kzo(j·ω)].

Porównując charakterystyki częstotliwościowe przykładu otwartego układu regulacji (zob. rysunki 2.6.1–2.6.4), dostrzegamy zależność zapasu stabilności od wartości wzmocnienia regulatora i jego stałych czasowych. Ważny jest także sposób kompensacji inercji obiektu regulacji. Na rysunkach 2.6.1 i 2.6.2 przedstawiono charakterystyki częstotliwościowe układu regulacji, w którym kompensacja inercji obiektu wykonana jest za pomocą całkującego i różniczkującego działania regulatora.

Oddziaływanie inercyjne obiektu regulacji – dwie największe inercje obiektu regulacji – może być kompensowane na podstawie dwóch zasad. Pierwsza zasada zakłada kompensację większej inercji przez całkujące działania regulatora, tzn., że $T_V = T_1$, $T_R = T_2$ dla $T_1 > T_2$. Druga zasada zakłada kompensację większej inercji przez różniczkujące działania regulatora, tzn., że $T_R = T_1$, $T_V = T_2$ dla $T_1 > T_2$.

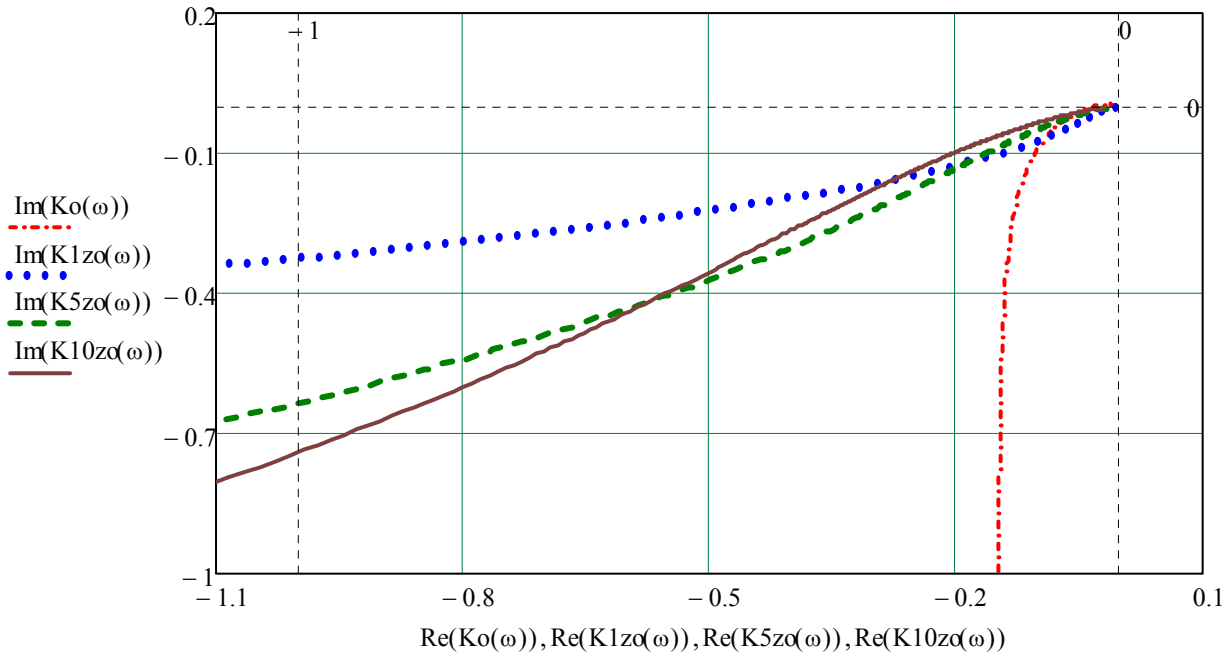
Wyznaczone charakterystyki jednoznacznie wskazują, że zasadą, która zapewnia większy zapas stabilności, jest zasada pierwsza – całkujące działanie regulatora kompensuje większą stałą czasową obiektu regulacji.

Na rysunkach 2.6.3 i 2.6.4 zobrazowano wpływ niedokładności kompensacji inercji – wpływ zmian znamionowych wartości parametrów układu regulacji, tzn. regulatora lub obiektu.

2.7. Badanie stabilności układu automatycznie regulującego obiekt całkujący rzeczywisty modelowany jako szeregowe połączenie z dwoma obiektami inercyjnymi pierwszego rzędu

Tabela 2.7.1.

(okno robocze programu Mathcad) – w polu tekstowym wpisz temat:	*Komentarz:*
Charakterystyki częstotliwościowe otwartego układu regulacji obiektu całkującego z regulatorem PID – badanie wpływu wzmocnienia regulatora $i := \sqrt{-1}$ $\omega := 0.01, 0.02 .. 10$ $Tc := 10$ $T1 := 1$ $T2 := 0.5$ $ko := 1$ $Tr := 1$ $Tv := 2$ $K1zo(\omega) := \frac{ko}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T2)}\cdot\frac{1\cdot(1+i\cdot\omega\,Tv)\cdot(1+i\cdot\omega\,Tr)}{i\cdot\omega\cdot Tv}$ $K5zo(\omega) := \frac{ko}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T2)}\cdot\frac{5\cdot(1+i\cdot\omega\,Tv)\cdot(1+i\cdot\omega\,Tr)}{i\cdot\omega\cdot Tv}$ $K10zo(\omega) := \frac{ko}{i\cdot\omega\cdot Tc\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T1)\cdot(1+i\cdot\omega\cdot T2)}\cdot\frac{10\cdot(1+i\cdot\omega\,Tv)\cdot(1+i\cdot\omega\,Tr)}{i\cdot\omega\cdot Tv}$	Działanie różniczkujące regulatora kompensuje stałą czasową obiektu regulacji, tzn. $Tr = T_1$. Obiekt regulacji jako szeregowe połączenie obiektu całkującego i dwóch obiektów inercyjnych pierwszego rzędu. Regulator PID jako szeregowe połączenie regulatora PI i PD.



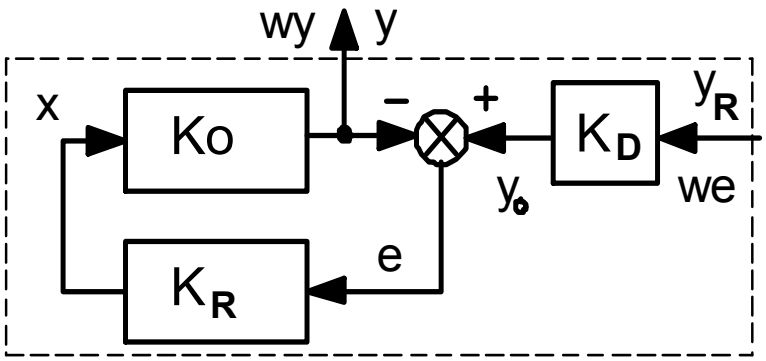
Rys. 2.7.1. Charakterystyki częstotliwościowe obiektu i otwartego układu regulacji – parametry obiektu i regulatora PID określono w tabeli 2.7.1

Spostrzeżenie

Zapas stabilności określany jako najmniejsza odległość charakterystyki otwartego układu regulacji od punktu (–1, j 0) na płaszczyźnie zespolonej może ze wzrostem iloczynu wzmocnień obiektu i regulatora rosnąć lub maleć. W przypadku przykładu przedstawionego w tabeli 2.7.1 wzrost wzmocnienia zwiększa zapas stabilności. Wzrost wzmocnienia regulatora obiektów liniowych w praktycznie realizowanych układach regulacji najczęściej zmniejsza zapas stabilności.

2.8. Układ regulacji z dodatkową korekcją sygnału sterującego

Wprowadzając do podstawowego modelu układu regulacji dodatkowy obiekt o transmitancji K_D, uzyskujemy transmitancję zastępczą układu regulacji w postaci wzoru (2.8.1).



$$Kz = \frac{y}{y_R} = \frac{K_O \cdot K_R \cdot K_D}{1 + K_O \cdot K_R} \quad (2.8.1)$$

Rys. 2.8.1. Układ regulacji z dodatkową korekcją sygnału sterującego

Obiekt inercyjny pierwszego rzędu o transmitancji: $$K_D(s) = \frac{1}{1 + s \cdot T_D} \qquad (2.8.2)$$

zastosowany jako korektor sygnału sterującego dla układu regulacji z rzeczywistym obiektem całkującym (przykład przedstawiony w tab.2.5.1) zmienia zgodnie ze wzorem (2.8.1) transmitancję $K_Y(s)$ sygnału wyjściowego (wzór 2.5.16) do postaci:

$$K_Z(s) = \frac{1 + 4 \cdot T_2 \cdot s}{1 + 4 \cdot T_2 \cdot s + 8 \cdot T_2^2 \cdot s^2 + 8 \cdot T_2^3 \cdot s^3} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot T_D} \cdot \qquad (2.8.3)$$

Analizę właściwości tak skorygowanego układu regulacji przedstawiono w tabeli 2.8.1.

Tabela 2.8.1.

(okno robocze programu Mathcad) *– w polu tekstowym wpisz temat:*	*Komentarz:*
Charakterystyki czasowe rzeczywistego obiektu całkującego z regulatorem PID w korygowanym dodatkowo układzie regulacji – badanie wpływu dodatkowej stałej czasowej T_D	Transmitancję takiego układu regulacji określa wzór 2.8.3.
	Stała czasowa obliczeń T = T2
$\frac{1}{s} \cdot \frac{1 + 4 \cdot s \cdot T}{1 + 4 \cdot s \cdot T + 8 \cdot s^2 \cdot T^2 + 8 \cdot s^3 \cdot T^3}$	Transformata sygnału wyjściowego y1
$\frac{1}{s} \cdot \frac{1 + 4 \cdot s \cdot T}{1 + 4 \cdot s \cdot T + 8 \cdot s^2 \cdot T^2 + 8 \cdot s^3 \cdot T^3} \cdot \frac{1}{(1 + 2 \cdot s \cdot T)}$	Transformata sygnału wyjściowego y2
.....	
$\frac{1}{s} \cdot \frac{1 + 4 \cdot s \cdot T}{1 + 4 \cdot s \cdot T + 8 \cdot s^2 \cdot T^2 + 8 \cdot s^3 \cdot T^3} \cdot \frac{1}{(1 + 7 \cdot s \cdot T)}$	Transformata sygnału wyjściowego y7
$T := 1 \qquad t := 0, 0.1 .. 30$	
$y1(t) := e^{-\frac{t}{2 \cdot T}} - 2 \cdot e^{-\frac{t}{4 \cdot T}} \cdot \cosh\left(\frac{\sqrt{3} \cdot t \cdot \sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{4}\right) + 1$	Sygnał wyjściowy y1(t)
	.....
$y2(t) := \frac{2 \cdot T \cdot \sqrt{-\frac{1}{T^2}} - 2 \sqrt{3} \cdot e^{-\frac{t}{4 \cdot T}} \cdot \sinh\left(\frac{\sqrt{3} \cdot t \cdot \sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{4}\right) ... + t \cdot e^{-\frac{t}{2 \cdot T}} \cdot \sqrt{-\frac{1}{T^2}} - 2 \cdot T \cdot e^{-\frac{t}{4 \cdot T}} \cdot \cosh\left(\frac{\sqrt{3} \cdot t \cdot \sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{4}\right) \cdot \sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{2 \cdot T \cdot \sqrt{-\frac{1}{T^2}}}$	

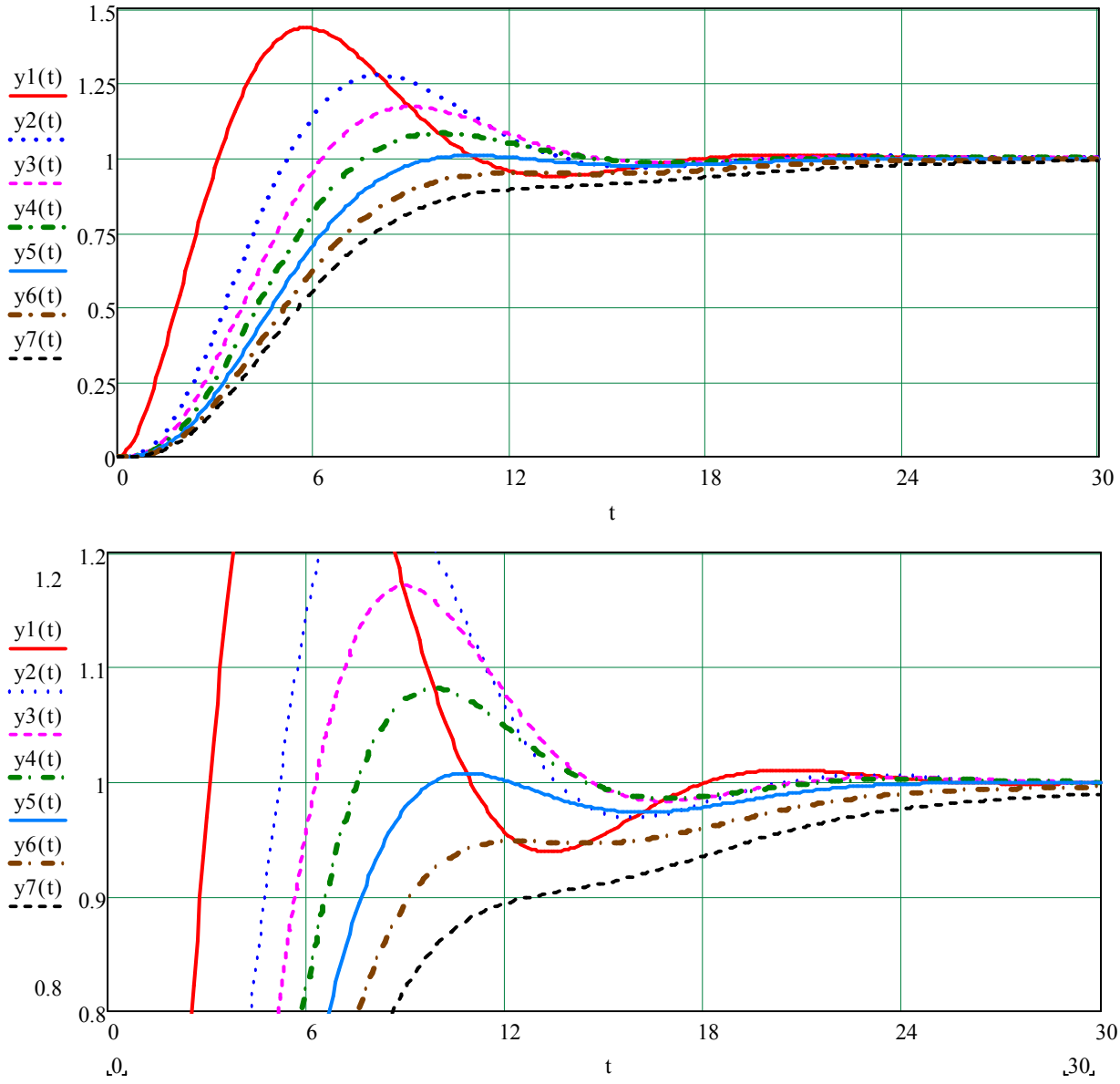
$$y3(t) := -\frac{6\cdot\sqrt{3}\cdot e^{-\frac{t}{4\cdot T}}\cdot\sinh\left(\frac{\sqrt{3}\cdot t\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{4}\right) - 7\cdot T\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}} \ldots + 14\cdot T\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T}}\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}} - 9\cdot T\cdot e^{-\frac{t}{3\cdot T}}\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}} + 2\cdot T\cdot e^{-\frac{t}{4\cdot T}}\cdot\cosh\left(\frac{\sqrt{3}\cdot t\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{4}\right)\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{7\cdot T\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}$$

$$y4(t) := -\frac{2\cdot\sqrt{3}\cdot e^{-\frac{t}{4\cdot T}}\cdot\sinh\left(\frac{\sqrt{3}\cdot t\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{4}\right) - 3\cdot T\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}} + 3\cdot T\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T}}\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{3\cdot T\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}$$

$$y5(t) := -\frac{30\cdot\sqrt{3}\cdot e^{-\frac{t}{4\cdot T}}\cdot\sinh\left(\frac{\sqrt{3}\cdot t\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{4}\right) - 57\cdot T\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}} + 38\cdot T\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T}}\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}} \ldots + 25\cdot T\cdot e^{-\frac{t}{5\cdot T}}\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}} - 6\cdot T\cdot e^{-\frac{t}{4\cdot T}}\cdot\cosh\left(\frac{\sqrt{3}\cdot t\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{4}\right)\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{57\cdot T\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}$$

$$y6(t) := -\frac{6\cdot\sqrt{3}\cdot e^{-\frac{t}{4\cdot T}}\cdot\sinh\left(\frac{\sqrt{3}\cdot t\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{4}\right) - 14\cdot T\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}} + 7\cdot T\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T}}\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}} \ldots + 9\cdot T\cdot e^{-\frac{t}{6\cdot T}}\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}} - 2\cdot T\cdot e^{-\frac{t}{4\cdot T}}\cdot\cosh\left(\frac{\sqrt{3}\cdot t\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{4}\right)\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{14\cdot T\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}$$

$$y7(t) := -\frac{70\cdot\sqrt{3}\cdot e^{-\frac{t}{4\cdot T}}\cdot\sinh\left(\frac{\sqrt{3}\cdot t\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{4}\right) - 195\cdot T\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}} + 78\cdot T\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T}}\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}} \ldots}{195\cdot T\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}$$
$$+ 147\cdot T\cdot e^{-\frac{t}{7\cdot T}}\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}} - 30\cdot T\cdot e^{-\frac{t}{4\cdot T}}\cdot\cosh\left(\frac{\sqrt{3}\cdot t\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}}{4}\right)\cdot\sqrt{-\frac{1}{T^2}}$$



Rys. 2.8.2. Sygnały wyjściowe rzeczywistego obiektu całkującego w dodatkowo korygowanym układzie regulacji, dodatkowa stała czasowa $T_D = 1, 2..7$

Wniosek

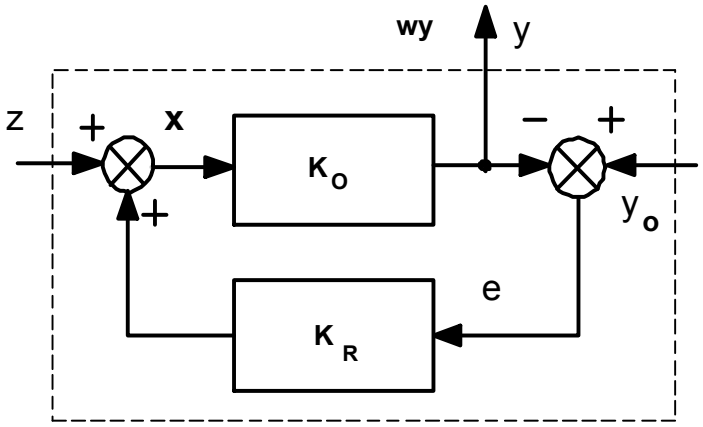
Wykresy wyjściowego sygnału rzeczywistego obiektu całkującego przedstawione na rysunku 2.8.2 wskazują, że optymalna wartość dodatkowej stałej czasowej korygującej sygnał sterujący zawiera się w przedziale: $4.5T > T_D > 5T$.

3. Kompensacja zakłóceń przez układ regulacji

3.1. Wprowadzenie

Elementarne modele układu regulacji, w których zakłócenie działa na wejściu obiektu regulacji, przedstawiono na rysunkach 2.2.2. i 3.1.1.

Analizę procesu kompensacji zakłóceń przez układ regulacji przeprowadzimy dla równoważnego modelu układu regulacji, którego schemat blokowy jest przedstawiony na rysunku 3.1.2.

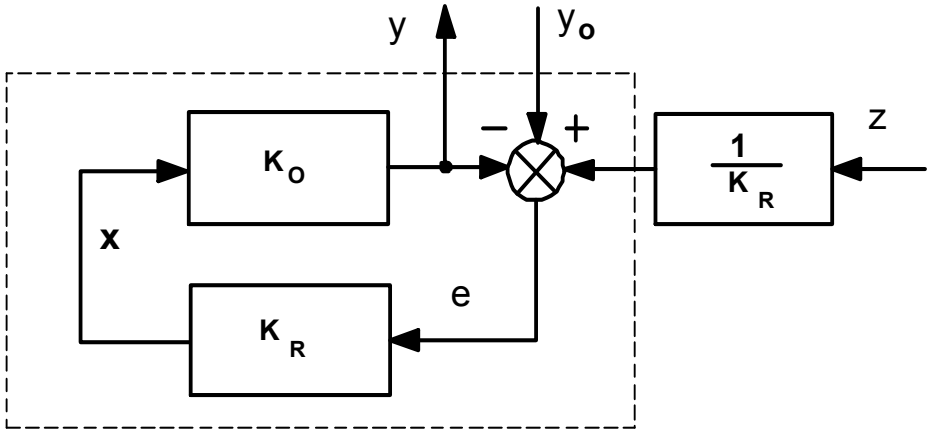


Analizę układu, w którym występuje jednoczesne oddziaływa-nie sygnału sterującego y_o i sygnału zakłócającego z, podzielimy na dwa etapy.

W pierwszym etapie zostanie oceniony wpływ zmiennej sterującej y_o dla zmiennej zakłócającej $z = 0$.

W drugim etapie zostanie oceniony wpływ zmiennej zakłócającej dla zmiennej sterującej $y_o = 0$.

Rys. 3.1.1. Elementarny model układu regulacji, w którym zakłócenie działa na wejściu obiektu regulacji



Rys. 3.1.2. Równoważny model układu regulacji dla zakłócenia działającego na wejściu obiektu regulacji

Przekształcenie modelu układu elementarnego w model układu równoważnego wprowadzający sygnał zakłócenia do głównego węzła sumacyjnego przez odwrotność transmitancji regulatora pozwala bezpośrednio ocenić (przez porównanie dróg działania) efektywność oddziaływania sygnału sterujący i sygnału zakłócającego.

Transformata wyjściowego sygnału obiektu regulacji w układzie, który przedstawiony jest na rysunku 3.1.2 jako funkcja sygnału zakłócającego z dla sygnału sterującego $y_o = 0$, jest określona przez wyrażenie:

$$\Delta y(s) = z(s) \cdot \frac{1}{K_R(s)} \cdot \frac{K_O(s) \cdot K_R(s)}{1 + K_O(s) \cdot K_R(s)} = z(s) \cdot \frac{K_O(s)}{1 + K_O(s) \cdot K_R(s)} . \qquad (3.1.1)$$

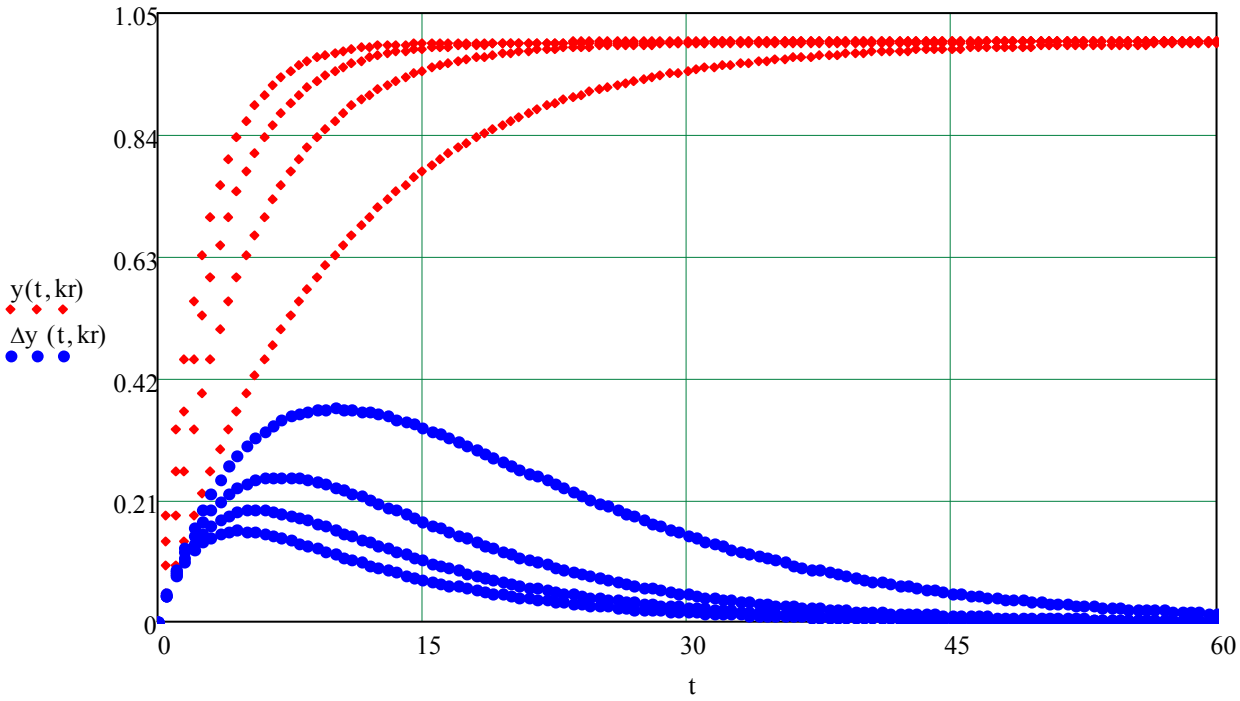
Transformata wyjściowego sygnału obiektu regulacji w układzie, który przedstawiony jest na rysunku 3.1.2 jako funkcja sygnału sterującego y_o dla sygnału zakłócającego $z = 0$, jest określona przez wyrażenie 2.2.4. z poprzedniego rozdziału tej monografii, tzn.:

$$y(s) = yo(s) \frac{K_O(s) \cdot K_R(s)}{1 + K_O(s) \cdot K_R(s)} . \qquad (3.1.2)$$

3.2. Analiza kompensacji zakłóceń obiektu inercyjnego pierwszego rzędu sterowanego regulatorem proporcjonalno-całkującym PI

Tabela 3.2.1.

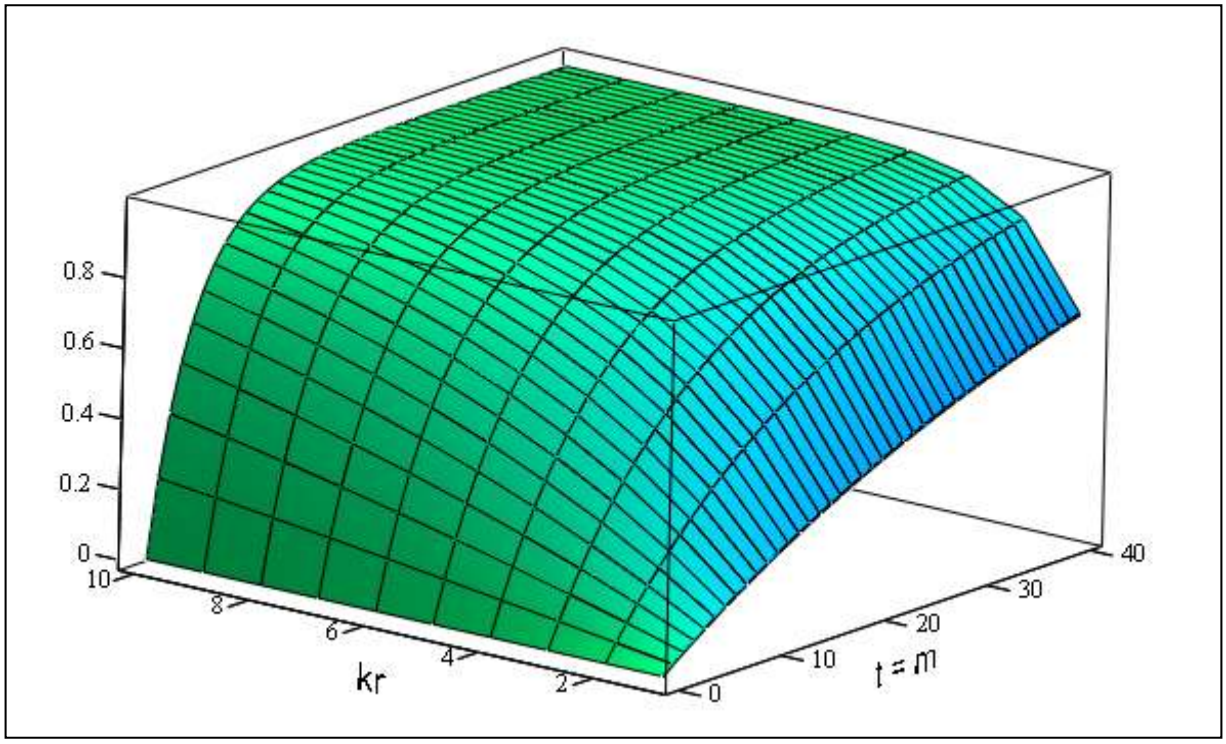
Charakterystyki czasowe y(t, kr), Δy(t, kr) układu regulacji dla sygnału sterującego yo lub zakłócającego z – badanie wpływu wzmocnienia regulatora	*Komentarz:* *Obiekt inercyjny pierwszego rzędu* *Regulator proporcjonalno-całkujący* *Kompensacja inercji obiektu, Tv = T1*
$\frac{ko}{1 + s \cdot T1} \quad kr \cdot \frac{(1 + s \cdot Tv)}{s \cdot Tv}$ $\frac{1}{s} \cdot \frac{ko \cdot kr}{ko \cdot kr + s \cdot T1}$ $\frac{1}{s} \cdot \frac{s \cdot T1}{kr \cdot \left(1 + \frac{s \cdot T1}{ko \cdot kr}\right) \cdot (1 + s \cdot T1)}$ $t := 0, 0.5 .. 60 \quad kr := 1, 2 .. 4$ $ko := 1.001 \quad T1 := 10$ $y(t, kr) := 1 - e^{-\frac{1}{T1} \cdot ko \cdot kr \cdot t}$ $\Delta y(t, kr) := \frac{ko \cdot e^{-\frac{t}{T1}} - ko \cdot e^{-\frac{ko \cdot kr \cdot t}{T1}}}{ko \cdot kr - 1}$	Transmitancja obiektu i regulatora. Transformata układu regulacji dla sygnału wyjściowego y(s),(z(t) = 0, $y_o(t) = 1(t)$) Transformata sygnału wyjściowego Δy(s), (yo(t) = 0, z(t) = 1(t)) Parametry wykresów. *W menu Formatting Currently selected x–y Plot dla zakładki Traces wybrano: Symbol: ♦, •, Symbol Weight: p, Line Type: points, Y.* Sygnał wyjściowy y Sygnał wyjściowy Δy *Wykresy na rysunku 3.2.1 są śladami większej ilości wektorów w funkcji drugiego wektora.*



Rys. 3.2.1. Sygnały wyjściowe y i Δy jako kompensacja działania zakłócenia dla różnych wartości wzmocnienia regulatora PI, kr = 1, 2, 3, 4. Ze wzrostem wzmocnienia regulatora sygnał Δy maleje

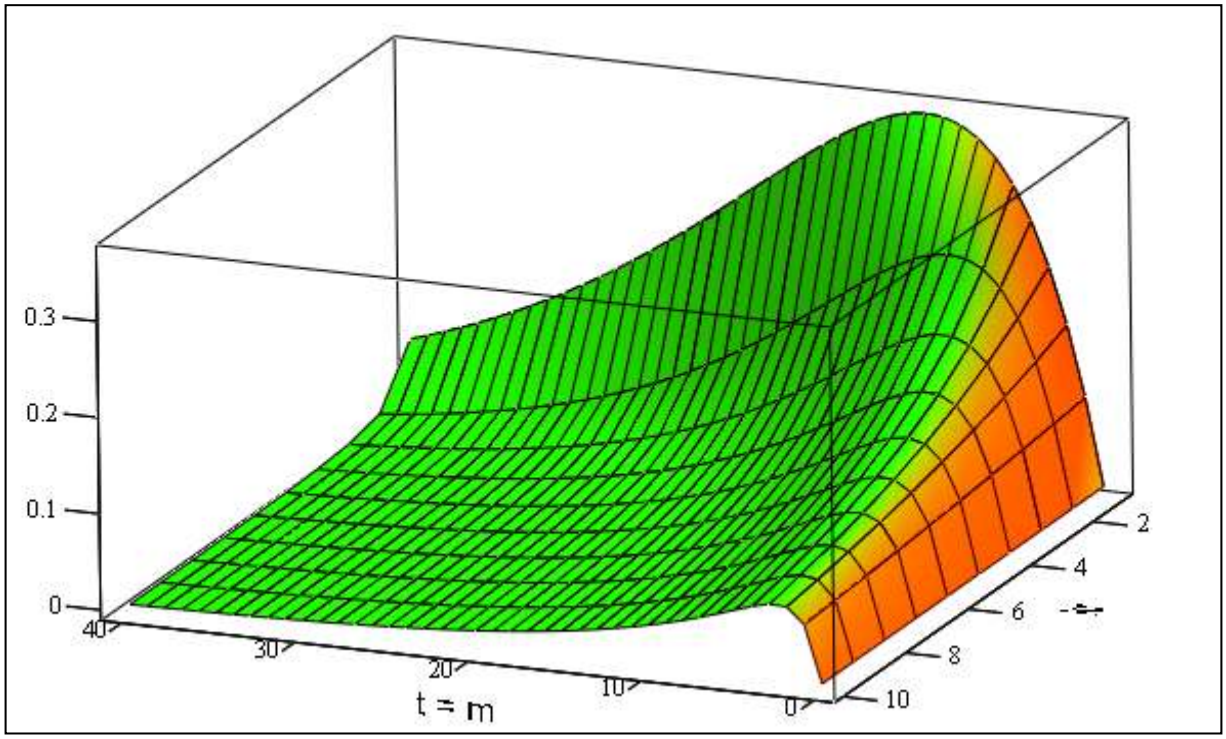
Tabela 3.2.2.

Zestawienia charakterystyk czasowych y(t, kr), Δy(t, kr) układu regulacji dla sygnału sterującego yo lub zakłócającego z – badanie wpływu wzmocnienia regulatora	*Komentarz:* *Obiekt inercyjny pierwszego rzędu.* *Regulator proporcjonalno-całkujący.* *Kompensacja inercji obiektu, $T_V = T_1$*
$ko := 1.001 \quad T1 := 10$	Parametry obliczeń
$m := 0 .. 40 \quad n := 1 .. 10$ $t_m := 0 + 0.25 \cdot m \quad kr_n := n$	Zmienne pomocnicze
$y(t, kr) := 1 - e^{-\frac{1}{T1} \cdot ko \cdot kr \cdot t}$	Sygnał wyjściowy y
$Y_{m,n} := y(t_m, kr_n)$	Macierz wartości sygnału y
$m := 0 .. 40 \quad t_m := 0 + 1 \cdot m$	Zmiana parametrów obliczeń
$\Delta y(t, kr) := \frac{ko \cdot e^{-\frac{t}{T1}} - ko \cdot e^{-\frac{ko \cdot kr \cdot t}{T1}}}{ko \cdot kr - 1}$	Sygnał zmian Δy
$\Delta Y_{m,n} := \Delta y(t_m, kr_n)$	Macierz wartości sygnału Δy



Y

Rys. 3.2.2. Zestawienie charakterystyk czasowych obiektu inercyjnego pierwszego rzędu sterowanego regulatorem PI dla $T_1 = T_V = 10$, kr = 1, 2..10



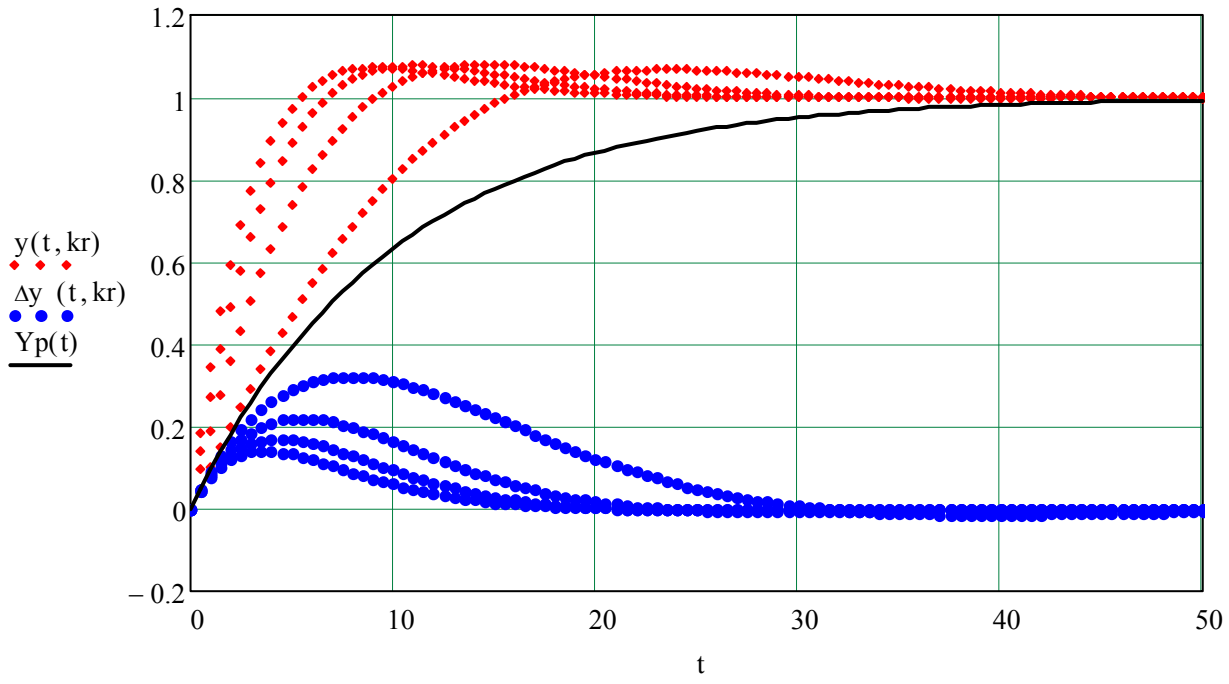
ΔY

Rys. 3.2.3. Zestawienie charakterystyk kompensacji zakłócenia działającego na obiekt inercyjny pierwszego rzędu sterowany przez regulator PI dla $T_1 = T_V = 10$, kr = 1, 2..10

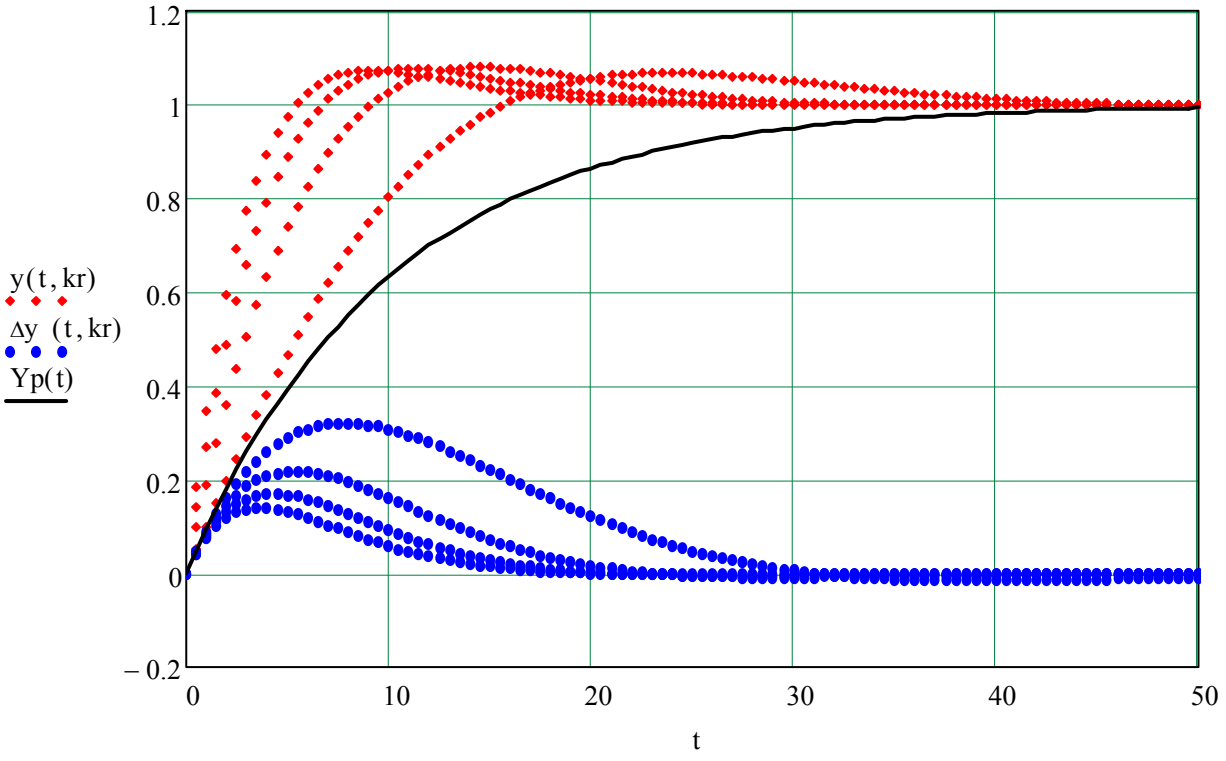
```
```

Tabela 3.2.3.

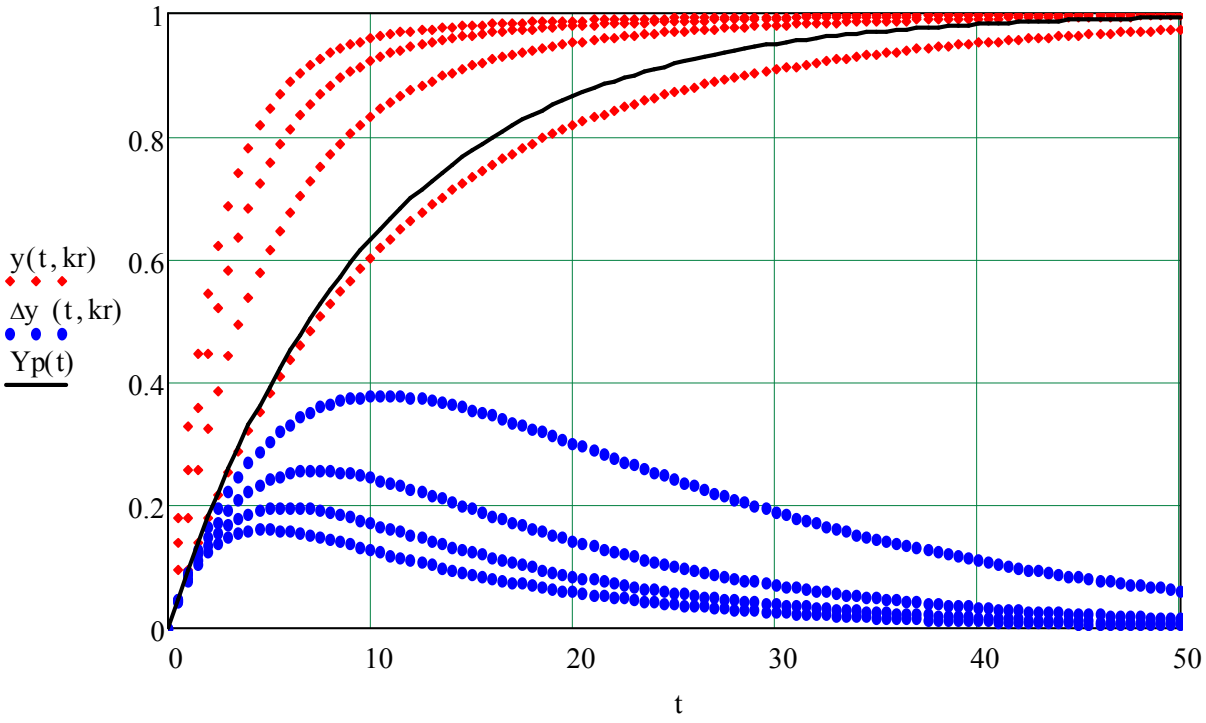
Charakterystyki czasowe y(t, kr), Δy(t, kr) układu regulacji dla sygnału sterującego yo lub zakłócającego z – badanie wpływu wzmocnienia regulatora	*Komentarz:* *Obiekt inercyjny pierwszego rzędu. Regulator proporcjonalno-całkujący.* *Brak kompensacji inercji obiektu, Tv ≠ T1*
$\frac{ko}{1+s\cdot T1}$ $\quad kr\cdot\frac{(1+s\cdot Tv)}{s\cdot Tv}$	Transmitancje: obiektu, regulatora
$\frac{1}{s}\cdot\frac{ko\cdot kr}{ko\cdot kr+s\cdot T1}$	Transformata układu regulacji dla sygnału wyjściowego y(s), (z(t) = 0, yo(t) = 1(t))
$\frac{1}{s}\cdot\frac{ko\cdot kr+ko\cdot kr\cdot s\cdot Tv}{ko\cdot kr+ko\cdot kr\cdot s\cdot Tv+s\cdot Tv+s^2\cdot T1\cdot Tv}$	Transformata obiektu regulacji dla sygnału wyjściowego y(s), (z(t) = 0, yo(t) = 1(t))
$T1 := 10 \quad Tv := 5 \quad ko := 1$	Parametry układu regulacji
$kr := 1,2..4$	Parametry obliczeń
$y(t,kr) := -\frac{e^{-\frac{t+ko\cdot kr\cdot t}{2\cdot T1}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{B(kr)}}{2}\right)-T1\cdot\sqrt{B(kr)}\ldots}{T1\cdot\sqrt{B(kr)}}$ $+\frac{T1\cdot e^{-\frac{t+ko\cdot kr\cdot t}{2\cdot T1}}\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{B(kr)}}{2}\right)\cdot\sqrt{B(kr)}\ldots}{T1\cdot\sqrt{B(kr)}}$ $+\frac{\left(-ko\cdot kr\cdot e^{-\frac{t+ko\cdot kr\cdot t}{2\cdot T1}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{B(kr)}}{2}\right)\right)}{T1\cdot\sqrt{B(kr)}}$	Obliczenia transformat odwrotnych Laplace'a wykonaj jak w przykładach rozdziału 2. Sygnał wyjściowy y
$B(kr) := \frac{Tv+Tv\cdot ko^2\cdot kr^2-4\cdot T1\cdot ko\cdot kr+2\cdot Tv\cdot ko\cdot kr}{T1^2\cdot Tv}$	Uwaga: *W pliku obliczeń podstawienie B(kr) musi być wpisane przed wyrażeniem, którego dotyczy.*
$\frac{1}{s}\cdot\frac{ko\cdot s\cdot Tv}{ko\cdot kr+ko\cdot kr\cdot s\cdot Tv+s\cdot Tv+s^2\cdot T1\cdot Tv}$	Transformata układu regulacji dla sygnału wyjściowego Δy(s), (yo(t) = 0, z(t) = 1(t))
$\Delta y(t,kr) := \frac{2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t+ko\cdot kr\cdot t}{2\cdot T1}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{B(kr)}}{2}\right)}{T1\cdot\sqrt{B(kr)}}$	Sygnał wyjściowy Δy



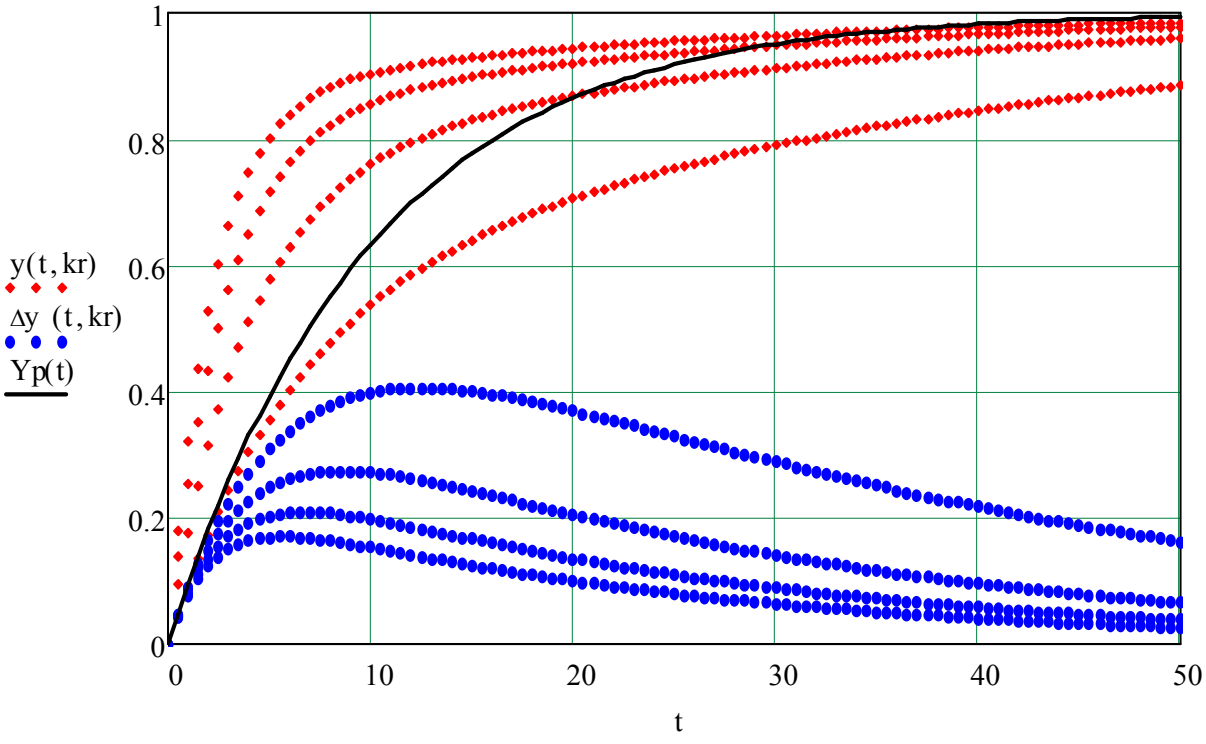
Rys. 3.2.4. Charakterystyka czasowa Yp obiektu i sygnały wyjściowe y i Δy jako kompensacja działania zakłócenia dla różnych wartości wzmocnienia regulatora PI, kr = 1, 2, 3, 4, T_1 = 10, Tv = 5. Ze wzrostem wzmocnienia regulatora sygnał Δy maleje



Rys. 3.2.5. Charakterystyka czasowa Yp obiektu i sygnały wyjściowe y i Δy jako kompensacja działania zakłócenia dla różnych wartości wzmocnienia regulatora PI, kr = 1, 2, 3, 4, T_1 = 10, T_V = 2. Ze wzrostem wzmocnienia regulatora sygnał Δy maleje



Rys. 3.2.6. Charakterystyka czasowa Yp obiektu i sygnały wyjściowe y i Δy jako kompensacja działania zakłócenia dla różnych wartości wzmocnienia regulatora PI, kr = 1, 2, 3, 4, $T_1 = 10$, $T_V = 12$. Ze wzrostem wzmocnienia regulatora sygnał Δy maleje.



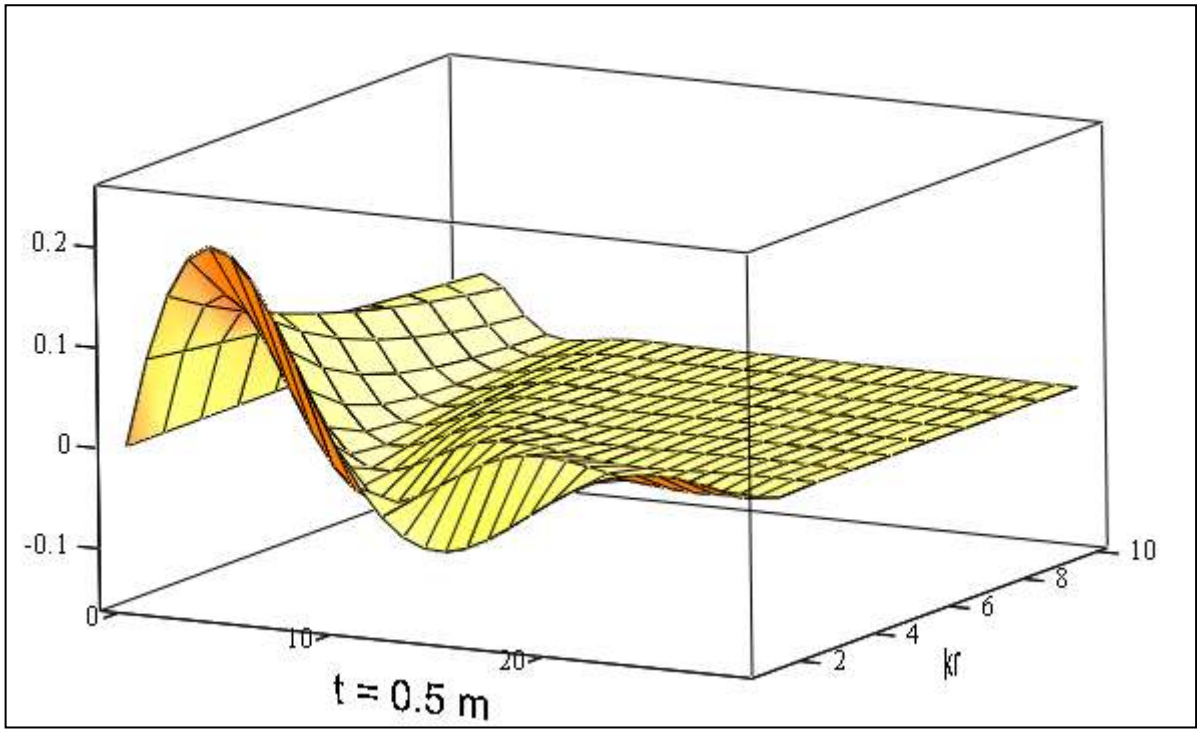
Rys. 3.2.7. Charakterystyka czasowa Yp obiektu i sygnały wyjściowe y i Δy jako kompensacja działania zakłócenia dla różnych wartości wzmocnienia regulatora PI, kr = 1, 2, 3, 4, $T_1 = 10$, $T_V = 12$. Ze wzrostem wzmocnienia regulatora sygnał Δy maleje.

Tabela 3.2.4.

Zestawienia charakterystyk czasowych y(t, kr), Δy(t, kr) układu regulacji dla sygnału sterującego y_o lub zakłócającego z – badanie wpływu wzmocnienia regulatora	*Komentarz:* *Obiekt inercyjny pierwszego rzędu. Regulator proporcjonalno-całkujący.* *Brak kompensacji inercji obiektu, $T_V \neq T_1$*
$T1 := 10 \quad ko := 1.001 \quad Tv := 2$ $m := 0..30 \quad n := 1..10$ $t_m := m \quad kr_n := n$	Parametry układu regulacji Parametry obliczeń Zmienne pomocnicze
$y(t,kr) := -\dfrac{e^{-\frac{t+ko\cdot kr\cdot t}{2\cdot T1}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{B(kr)}}{2}\right) - T1\cdot\sqrt{B(kr)} \ldots + T1\cdot e^{-\frac{t+ko\cdot kr\cdot t}{2\cdot T1}}\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{B(kr)}}{2}\right)\cdot\sqrt{B(kr)} \ldots + \left(-ko\cdot kr\cdot e^{-\frac{t+ko\cdot kr\cdot t}{2\cdot T1}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{B(kr)}}{2}\right)\right)}{T1\cdot\sqrt{B(kr)}}$	Obliczenia transformat odwrotnych Laplace'a wykonaj jak w przykładach rozdziału 2. Sygnał wyjściowy y
$B(kr) := \dfrac{Tv + Tv\cdot ko^2\cdot kr^2 - 4\cdot T1\cdot ko\cdot kr + 2\cdot Tv\cdot ko\cdot kr}{T1^2\cdot Tv}$	Uwaga: *W pliku obliczeń podstawienie B(kr) musi być wpisane przed wyrażeniem, którego dotyczy.*
$Y_{m,n} := y(t_m, kr_n)$	Macierz wartości sygnału y
$\Delta y(t,kr) := \dfrac{2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t+ko\cdot kr\cdot t}{2\cdot T1}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{B(kr)}}{2}\right)}{T1\cdot\sqrt{B(kr)}}$	Sygnał zmian Δy
$\Delta Y_{m,n} := \Delta y(t_m, kr_n)$	Macierz wartości sygnału Δy

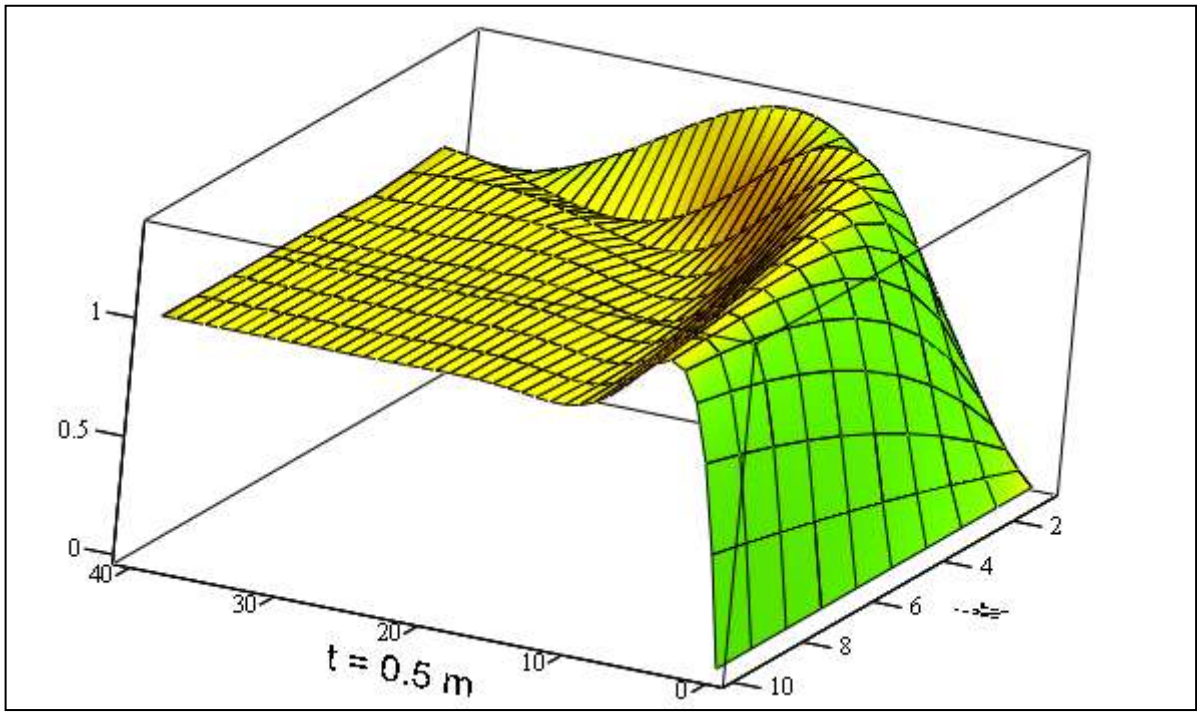
Podsumowanie

Z porównania przebiegów sygnałów wyjściowych y, Δy układu regulacji i charakterystyki czasowej obiektu regulowanego Yp (zob. rys. 3.2.1, 3.2.4–3.2.7) zauważamy, że największy wpływ na kształt wykresu zmian sygnałów w układzie regulacji ma dobór stałych czasowych regulatora. Wzrost wartości wzmocnienia zmniejsza czas regulacji i oddziaływanie sygnału zakłócającego.



ΔY

Rys. 3.2.3. Zestawienie charakterystyk kompensacji zakłócenia działającego na obiekt inercyjny pierwszego rzędu sterowany przez regulator PI dla: $T_1 = 10$, $T_V = 1$, kr = 1, 2..10



Y

Rys. 3.2.2. Zestawienie charakterystyk czasowych obiektu inercyjnego pierwszego rzędu sterowanego regulatorem PI dla: $T_1 = T_V = 10$, kr = 1, 2..10

```
```

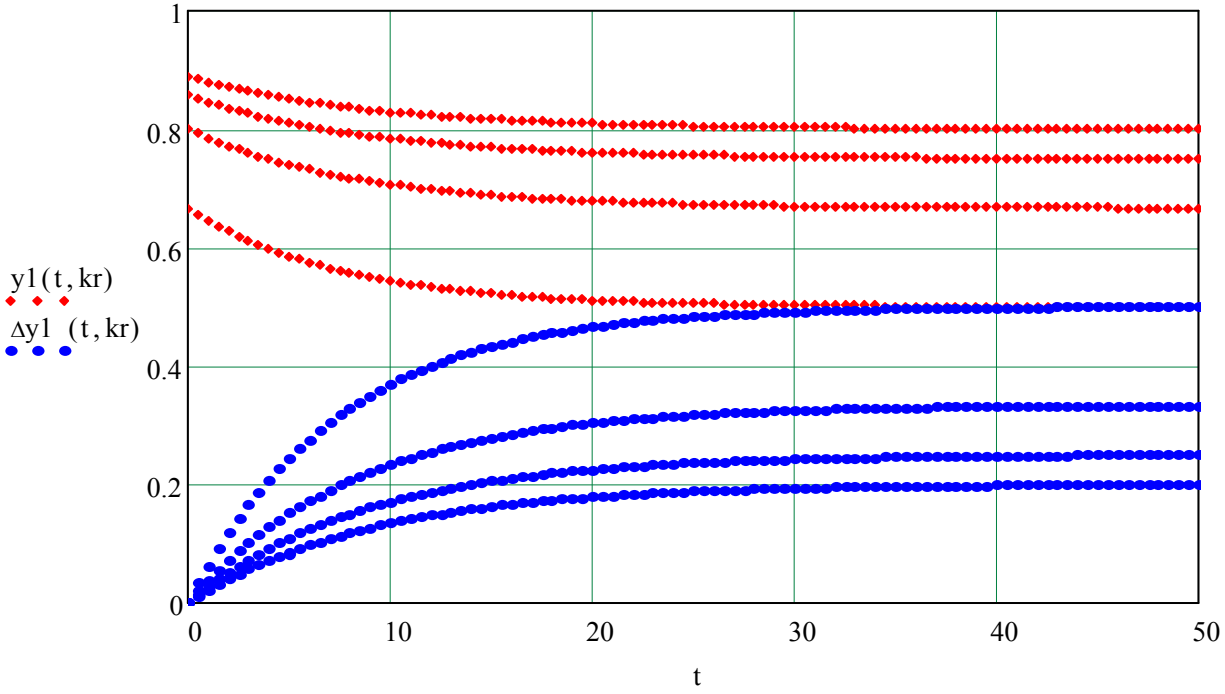
3.3. Analiza kompensacji zakłóceń obiektu inercyjnego pierwszego rzędu sterowanego regulatorem proporcjonalno-różniczkującym PD

Tabela 3.3.1.

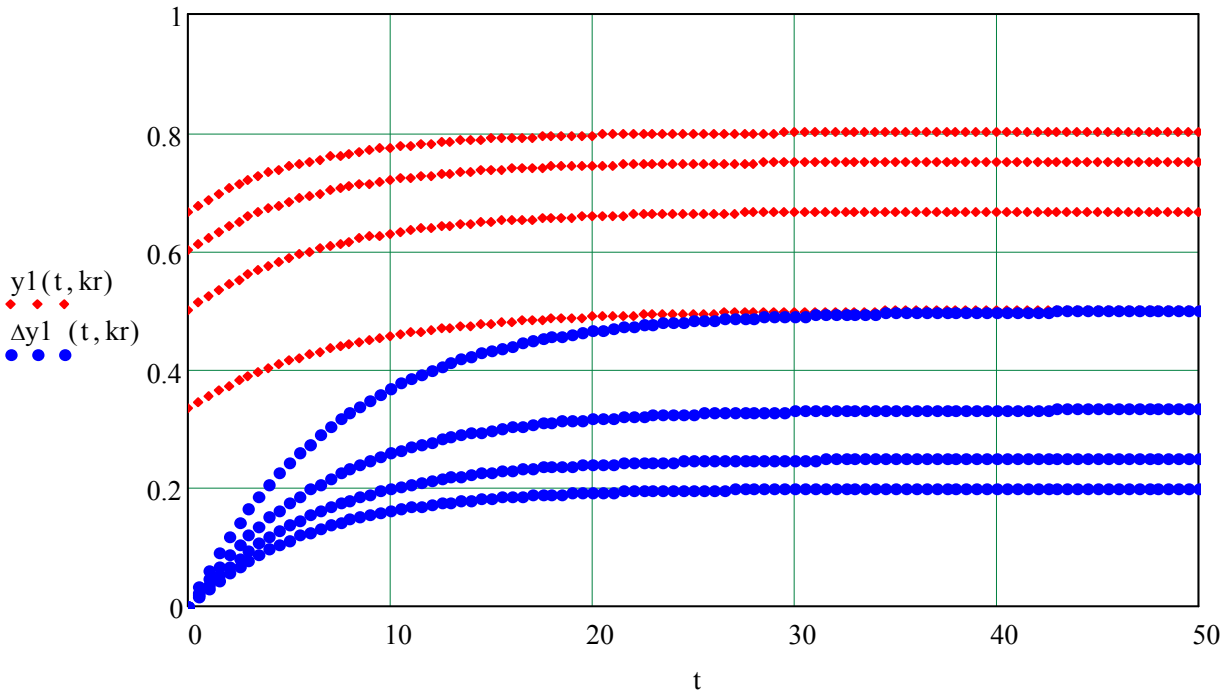
Charakterystyki czasowe y(t, kr), Δy(t, kr) układu regulacji dla sygnału sterującego yo lub zakłócającego z – badanie wpływu wzmocnienia regulatora	*Komentarz:* *Obiekt inercyjny pierwszego rzędu* *Regulator proporcjonalno-różniczkujący*
$\frac{ko}{1+s\cdot T1}$ $\quad kr\cdot(1+s\cdot Tr)$ $\frac{1}{s}\cdot\frac{Tr\cdot ko\cdot kr\cdot\left(s+\frac{1}{Tr}\right)}{(T1+ko\cdot kr\cdot Tr)\cdot\left(s+\frac{ko\cdot kr+1}{ko\cdot kr\cdot Tr+T1}\right)}$ $\frac{1}{s}\cdot\frac{ko}{ko\cdot kr+1+s\cdot(T1+ko\cdot kr\cdot Tr)}$ $t := 0, 0.5 .. 50 \qquad kr := 1, 2 .. 4$ $ko := 1.001 \qquad T1 := 5 \qquad Tr := 10$	Transmitancje: obiektu i regulatora Transformata układu regulacji dla sygnału wyjściowego y(s), (z(t) = 0, yo(t) = 1(t)) Transformata układu regulacji dla sygnału wyjściowego Δy(s), (yo(t) = 0, z(t) = 1(t)) Parametry obliczeń Parametry układu regulacji
$y1(t,kr) := \frac{ko\cdot kr\cdot\left[T1 - T1\cdot e^{-\frac{t\cdot(ko\cdot kr+1)}{T1+Tr\cdot ko\cdot kr}} + Tr\cdot e^{-\frac{t\cdot(ko\cdot kr+1)}{T1+Tr\cdot ko\cdot kr}} + Tr\cdot ko\cdot kr\right]}{(ko\cdot kr+1)\cdot(T1+Tr\cdot ko\cdot kr)}$ – Sygnał wyjściowy **y** wywołany sygnałem sterującym **yo**	
$\Delta y1\ (t,kr) := -\frac{ko\cdot\left[e^{-\frac{t\cdot(ko\cdot kr+1)}{T1+Tr\cdot ko\cdot kr}} - 1\right]}{ko\cdot kr+1}$	Sygnał wyjściowy Δy wywołany sygnałem zakłócającym **z**
Na rysunkach 3.3.1 i 3.3.2 przedstawiono sygnały wyjściowe obiektu regulowanego dla czasu różniczkowania regulatora $Tr > T_1$ oraz $Tr < T_1$.	

Podsumowanie

Porównując sygnały wyjściowe obiektu inercyjnego sterowanego regulatorem proporcjonalno różniczkującym PD z sygnałami wyjściowymi obiektu inercyjnego sterowanego regulatorem proporcjonalno-całkującym PI, dostrzegamy istotną różnicę. Regulator PD nie może całkowicie skompensować działania zakłócenia. Pozostaje błąd regulacji, którego wartość zależy od iloczynu wzmocnienia obiektu i regulatora.



Rys. 3.3.1. Sygnały wyjściowe y i Δy jako działanie zakłócenia dla różnych wartości wzmocnienia regulatora PD, kr = 1, 2, 3, 4. Ze wzrostem wzmocnienia regulatora sygnał Δy maleje. Czas różniczkowania regulatora $Tr = 10 > T_1 = 5$



Rys. 3.3.2. Sygnały wyjściowe y i Δy jako działanie zakłócenia dla różnych wartości wzmocnienia regulatora PD, kr = 1, 2, 3, 4. Ze wzrostem wzmocnienia regulatora sygnał Δy maleje. Czas różniczkowania regulatora $Tr = 5 < T_1 = 10$

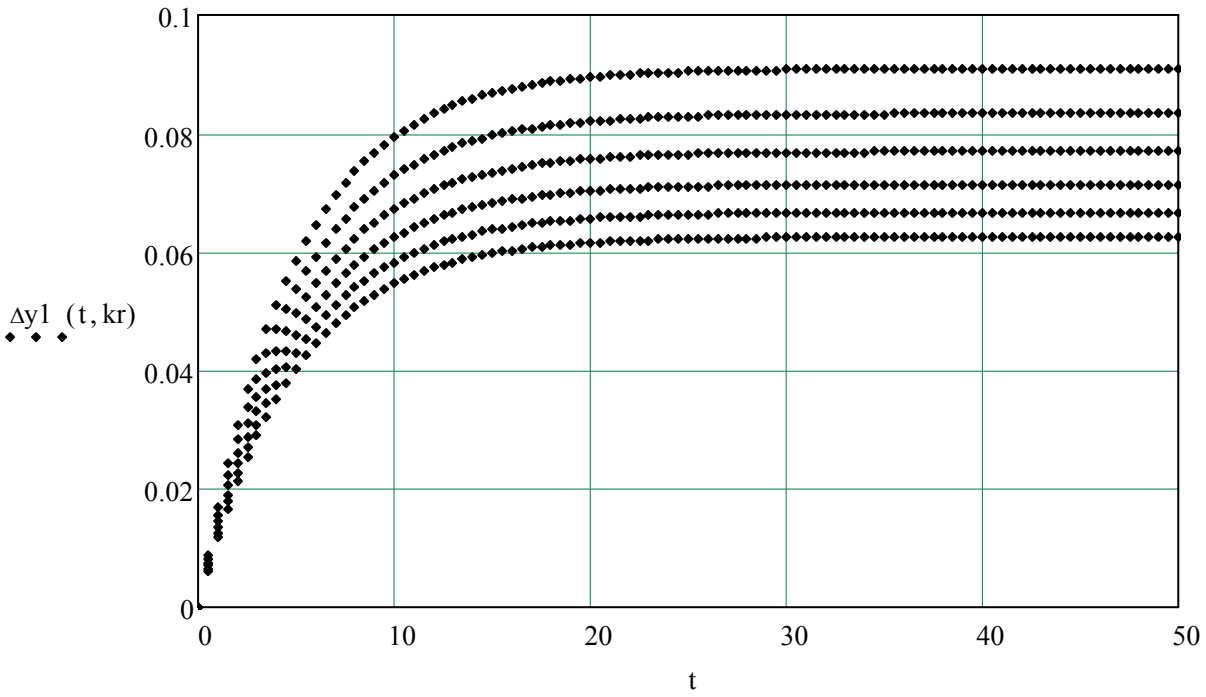
Dla stanu ustalonego ($t \to \infty$, $s \to 0$, sterowanie sygnałem y_o) sygnał wyjściowy **y** układu regulacji z regulatorem PD dąży do wartości: $$y = \frac{1}{1 + \frac{1}{ko \cdot kr}} . \qquad (3.3.1)$$

Dla stanu ustalonego ($t \to \infty$, $s \to 0$) sygnał wyjściowy Δy układu regulacji z regulatorem PD nie jest równy zero, dąży do wartości: $$\Delta y = \frac{ko}{ko \cdot kr + 1} . \qquad (3.3.2)$$

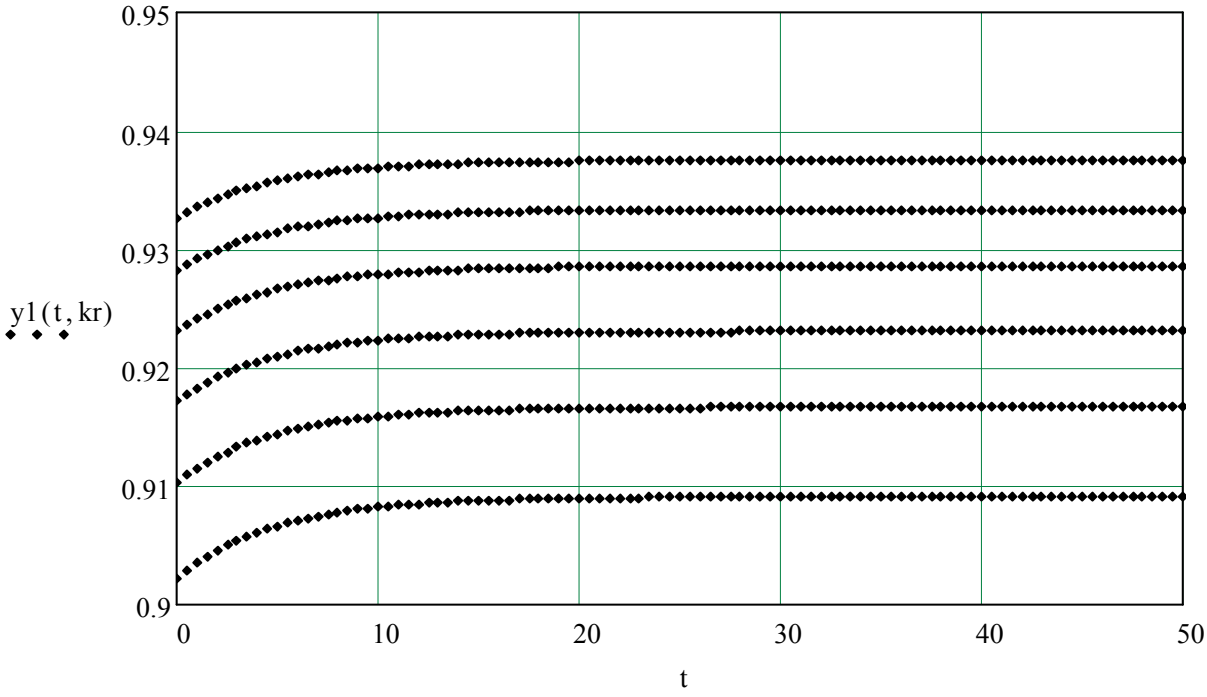
Tabela 3.3.2.

Zestawienia charakterystyk czasowych y(t, kr), Δy(t, kr) układu regulacji dla sygnału sterującego yo lub zakłócającego z – badanie wpływu wzmocnienia regulatora	*Komentarz:* *Obiekt inercyjny pierwszego rzędu* *Regulator proporcjonalno-różniczkujący* *Brak kompensacji inercji obiektu*
$ko := 1.001 \quad T1 := 10 \quad Tr := 5$ $m := 0 .. 50 \quad n := 1 .. 10$ $t_m := 0 + 1 \cdot m \quad kr_n := n$ $\Delta y1(t, kr) := -\frac{ko \cdot \left[e^{-\frac{t \cdot (ko \cdot kr + 1)}{T1 + Tr \cdot ko \cdot kr}} - 1 \right]}{ko \cdot kr + 1}$ $\Delta Y_{m,n} := \Delta y1\left(t_m, kr_n\right)$	Parametry układu regulacji Parametry obliczeń Tz – zastępcza stała czasowa sygnału wyjściowego y $Tz(kr) := \frac{T1 + Tr \cdot ko \cdot kr}{(ko \cdot kr + 1)}$ Sygnał wyjściowy Δy Macierz wartości sygnału Δy
$y1(t, kr) := \frac{ko \cdot kr \cdot \left[T1 - T1 \cdot e^{-\frac{t \cdot (ko \cdot kr + 1)}{T1 + Tr \cdot ko \cdot kr}} + Tr \cdot e^{-\frac{t \cdot (ko \cdot kr + 1)}{T1 + Tr \cdot ko \cdot kr}} + Tr \cdot ko \cdot kr \right]}{(ko \cdot kr + 1) \cdot (T1 + Tr \cdot ko \cdot kr)}$ – Sygnał wyjściowy y $Y_{m,n} := y\left(t_m, kr_n\right)$ – Macierz wartości sygnału y	

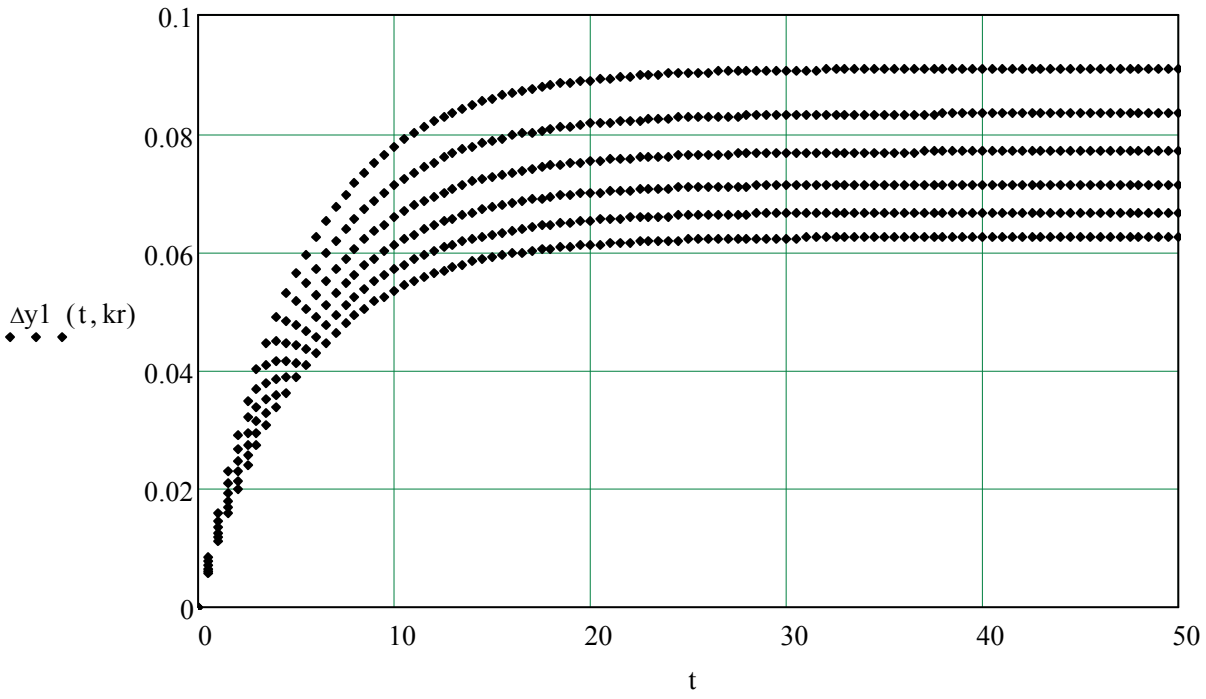
Na rysunkach 3.3.3 i 3.3.4 udokumentowano oczywisty wpływ zmian wzmocnienia i względnej wartości czasu różniczkowania regulatora na charakterystyki czasowe obiektu regulacji. Dla czasów różniczkowania regulatora większych od stałej czasowej obiektu regulacji sygnał wyjściowy obiektu dąży asymptotycznie do wartości ustalonej jako wartość minimalna (zob. rys. 3.3.2). Dla czasów różniczkowania mniejszych od stałej czasowej obiektu regulacji sygnał wyjściowy obiektu (zależny od sygnału sterującego y_o) dąży asymptotycznie do wartości ustalonej jako wartość maksymalna (zob. rys. 3.3.1). Istotny wpływ zastępczej stałej czasowej Tz (zob. tab. 3.3.2) na wartość błędu regulacji wyjściowego **y** obserwujemy w obszarze małych różnic wartości T1 i Tr (zob. rys. 3.3.3–3.3.6).



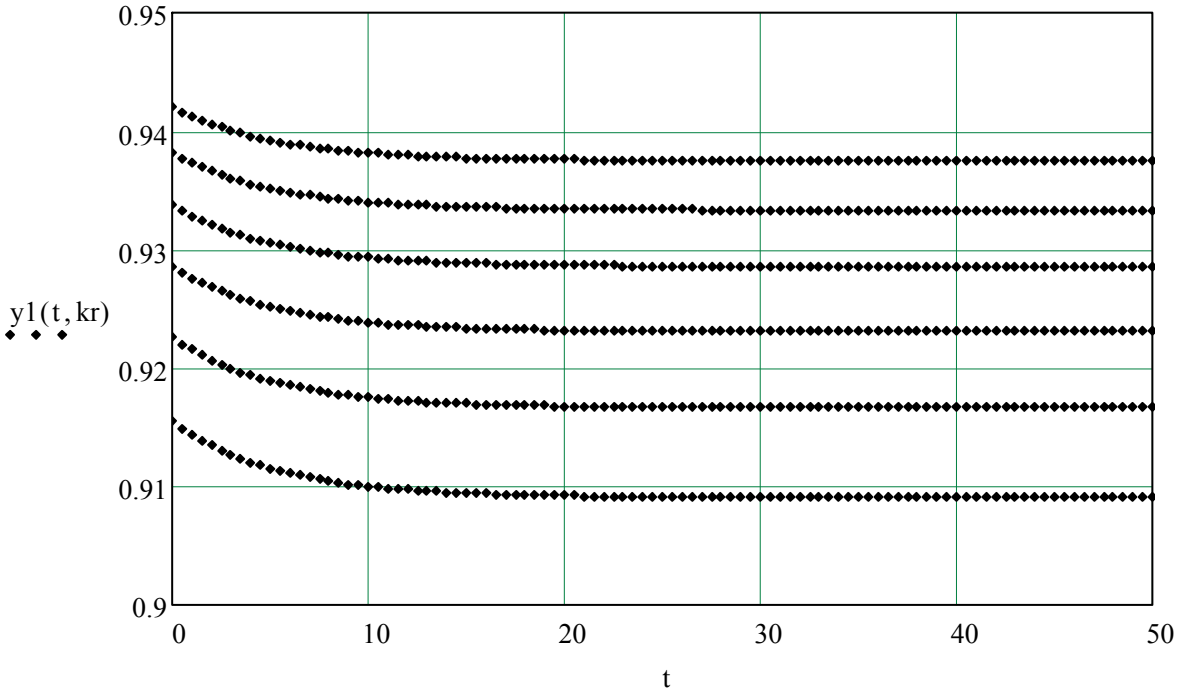
Rys. 3.3.3. Sygnał wyjściowy Δy jako działanie zakłócenia dla różnych wartości wzmocnienia regulatora PD, kr = 10, 11..15. Ze wzrostem wzmocnienia regulatora sygnał Δy maleje. Czas różniczkowania regulatora Tr = 4.8 < T_1 = 5,2



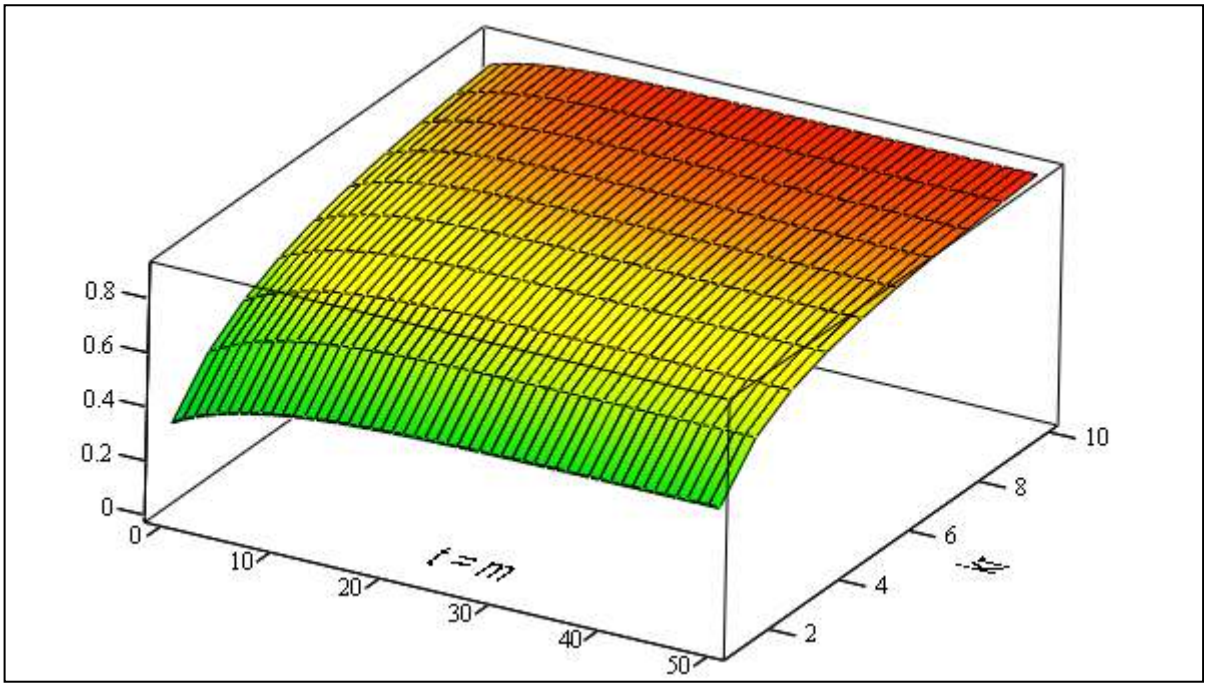
Rys. 3.3.4. Sygnał wyjściowy y jako działanie zakłócenia dla różnych wartości wzmocnienia regulatora PD, kr = 10, 11..15. Ze wzrostem wzmocnienia regulatora sygnał Δy maleje. Czas różniczkowania regulatora Tr = 4.8 < T_1 = 5.2



Rys. 3.3.5. Sygnał wyjściowy Δy jako działanie zakłócenia dla różnych wartości wzmocnienia regulatora PD, kr = 10, 11..15. Ze wzrostem wzmocnienia regulatora sygnał Δy maleje. Czas różniczkowania regulatora Tr = 4.8 < T_1 = 5,2

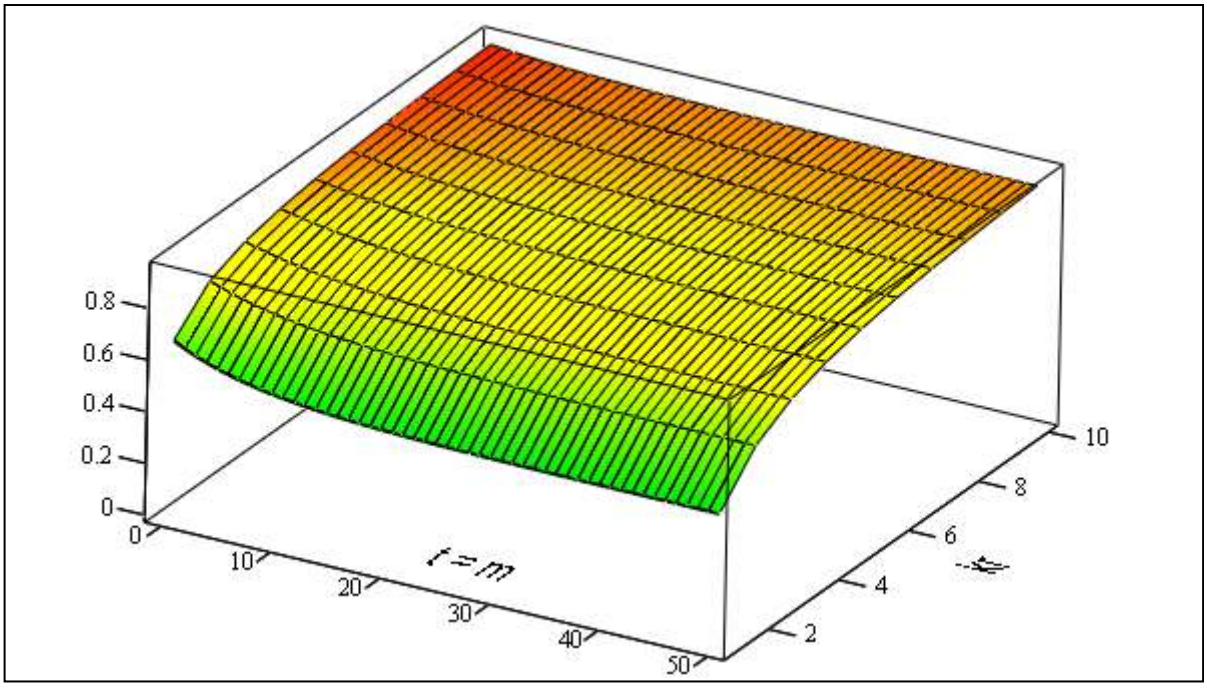


Rys. 3.3.6. Sygnał wyjściowy y jako działanie zakłócenia dla różnych wartości wzmocnienia regulatora PD, kr = 10, 11..15. Ze wzrostem wzmocnienia regulatora sygnał Δy maleje. Czas różniczkowania regulatora Tr = 5.2 < T_1 = 4.8



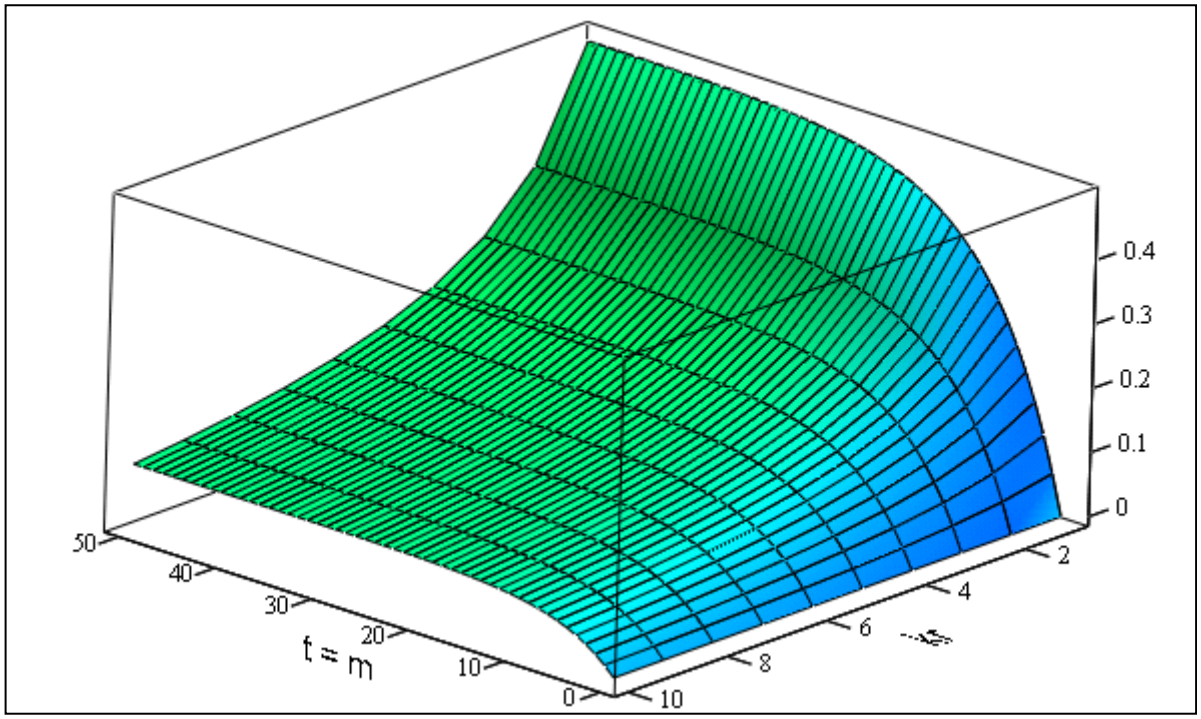
Y

Rys. 3.3.7. Zestawienie charakterystyk czasowych obiektu inercyjnego pierwszego rzędu sterowanego regulatorem PD dla: T_1 =10, Tr = 5, kr = 1, 2..10



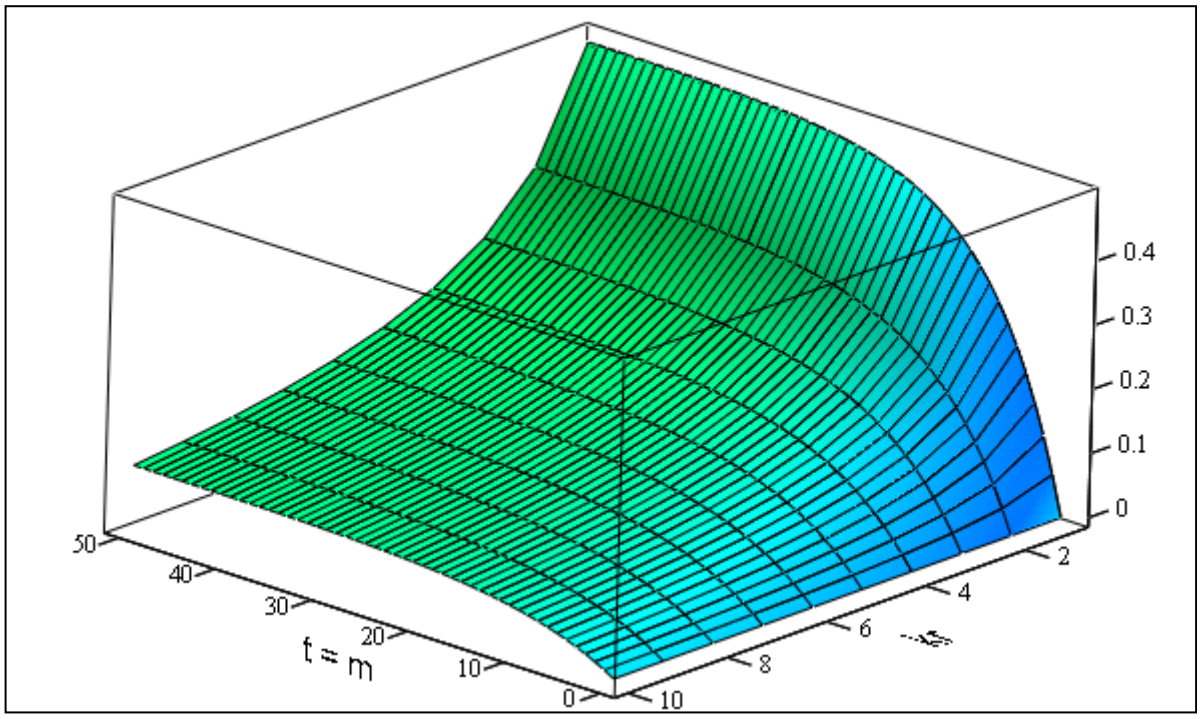
Y

Rys. 3.3.8. Zestawienie charakterystyk czasowych obiektu inercyjnego pierwszego rzędu sterowanego regulatorem PD dla: T_1 =10, Tr = 5, kr = 1, 2..10



ΔY

Rys. 3.3.9. Zestawienie charakterystyk działania zakłócenia na obiekt inercyjny pierwszego rzędu sterowany przez regulator PD dla: $T_1 = 10$, Tr = 5, kr = 1, 2..10



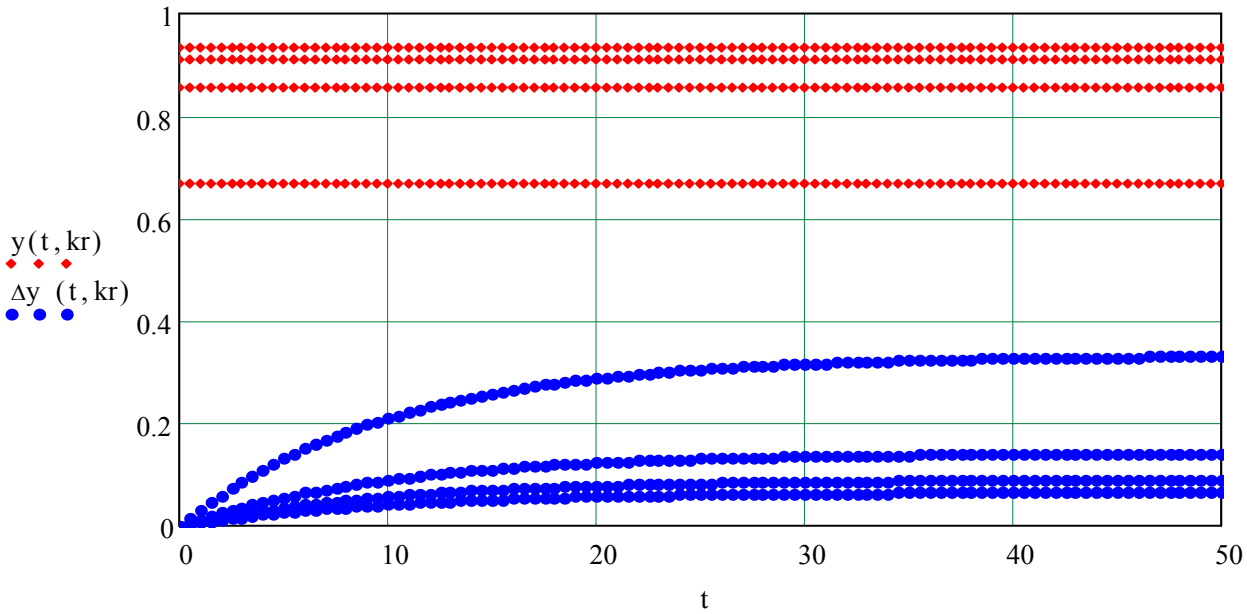
ΔY

Rys. 3.3.10. Zestawienie charakterystyk działania zakłócenia na obiekt inercyjny pierwszego rzędu sterowany przez regulator PD dla: $T_1 = 5$, Tr = 10, kr = 1, 2..10

```
```

Tabela 3.3.3.

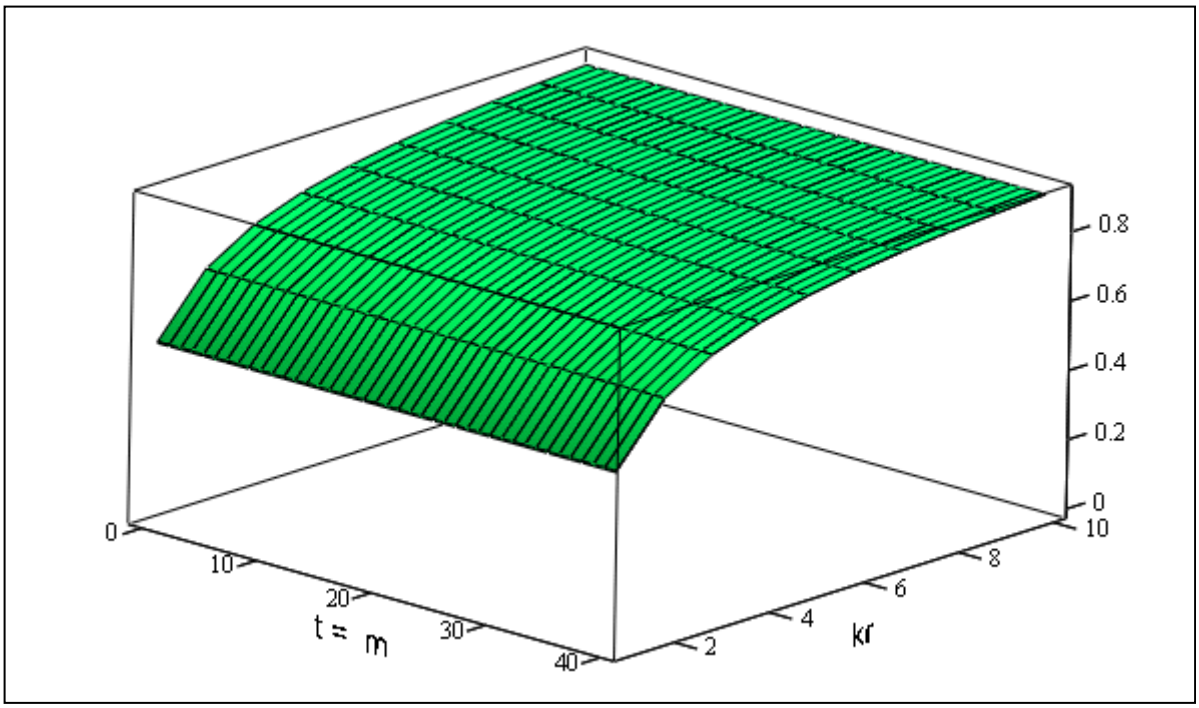
Zestawienia charakterystyk czasowych y(t, kr), Δy(t, kr) układu regulacji dla sygnału sterującego yo lub zakłócającego z – badanie wpływu wzmocnienia regulatora	*Komentarz:* *Obiekt inercyjny pierwszego rzędu* *Regulator proporcjonalno-różniczkujący* *Kompensacja inercji obiektu.*
$kr\cdot(1 + s\cdot Tr) \quad \frac{ko}{1 + s\cdot T1}$ $\frac{1}{s}\cdot\frac{ko\cdot kr}{1 + ko\cdot kr}$ lub $\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1 + \frac{1}{ko\cdot kr}}$ $\frac{1}{s}\cdot\frac{ko}{1 + ko\cdot kr}\cdot\frac{1}{(1 + s\cdot T1)}$ $t := 0, 0.5 .. 100 \quad T1 := 10 \quad ko := 1$ $kr := 2, 6 .. 16$ $y(t, kr) := \frac{ko\cdot kr}{1 + ko\cdot kr}$ $\Delta y\ (t, kr) := -\frac{ko\cdot\left(e^{-\frac{t}{T1}} - 1\right)}{ko\cdot kr + 1}$	Transmitancje: regulatora i obiektu Kompensacja inercji obiektu, Tr = T1 Transformata układu regulacji dla sygnału wyjściowego y(s),(z(t) = 0, $y_o(t) = 1(t)$) Transformata układu regulacji dla sygnału wyjściowego Δy(s),($y_o(t) = 0$, z(t) = 1(t)) Parametry układu regulacji Parametry obliczeń Sygnał wyjściowy y wywołany sygnałem sterującym y_o Sygnał wyjściowy Δy wywołany sygnałem zakłócającym z



Rys. 3.3.11. Sygnały wyjściowe y i Δy jako działanie zakłócenia dla różnych wartości wzmocnienia regulatora PD, kr = 2, 6, 10, 14. Ze wzrostem wzmocnienia regulatora sygnał Δy maleje. Czas różniczkowania regulatora Tr = T_1 = 10

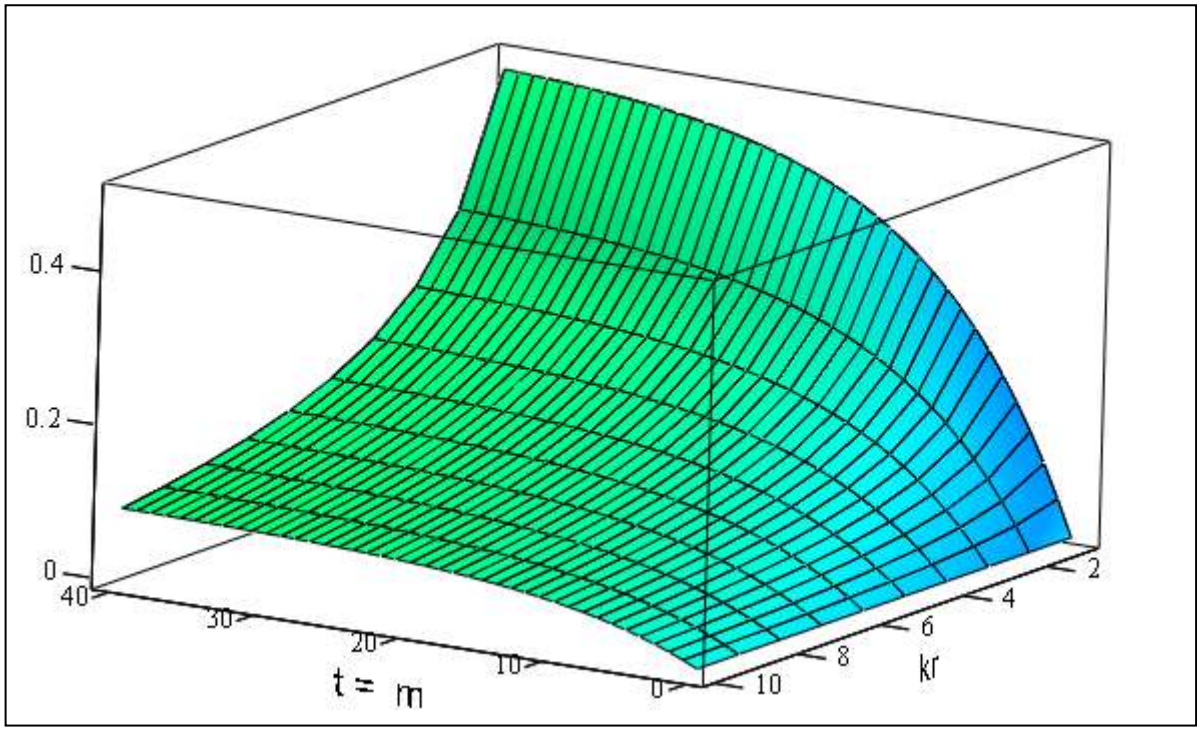
Tabela 3.3.4.

Zestawienia charakterystyk czasowych y(t, kr), Δy(t, kr) układu regulacji dla sygnału sterującego yo lub zakłócającego z – badanie wpływu wzmocnienia regulatora	*Komentarz:* *Obiekt inercyjny pierwszego rzędu* *Regulator proporcjonalno-różniczkujący* *Kompensacja inercji obiektu*
$ko := 1.001 \qquad T1 := 10$ $m := 0 .. 40 \qquad n := 1 .. 10$ $t_m := 0 + 1 \cdot m \qquad kr_n := n$	Parametry układu regulacji Parametry obliczeń
$y(t, kr) := \frac{ko \cdot kr}{1 + ko \cdot kr}$	Sygnał wyjściowy y wywołany sygnałem sterującym y_o
$Y_{m,n} := y(t_m, kr_n)$	Macierz wartości sygnału y
$\Delta y(t, kr) := -\frac{ko \cdot \left(e^{-\frac{t}{T1}} - 1\right)}{ko \cdot kr + 1}$	Sygnał wyjściowy Δy wywołany sygnałem zakłócającym z
$\Delta Y_{m,n} := \Delta y(t_m, kr_n)$	Macierz wartości sygnału Δy



Y

Rys. 3.3.12. Zestawienie charakterystyk czasowych obiektu inercyjnego pierwszego rzędu sterowanego regulatorem PD dla: $T_1 = Tr = 10$, kr = 1, 2..10



ΔY

Rys. 3.3.13. Zestawienie charakterystyk działania zakłócenia na obiekt inercyjny pierwszego rzędu sterowany przez regulator PD dla: $T_1 = Tr = 10$, kr = 1, 2..10

3.4. Analiza kompensacji zakłóceń obiektu inercyjnego trzeciego rzędu sterowanego regulatorem PID

Zakłada się, że obiekt inercyjny trzeciego rzędu modelowany jest jako szeregowe połączenie obiektów inercyjnych pierwszego rzędu. Transmitancja takiego obiektu jest określona przez wyrażenie:

$$Ko(s) := \frac{ko}{(1 + s\cdot T1)\cdot(1 + s\cdot T2)\cdot(1 + s\cdot T3)}. \qquad (3.4.1)$$

Regulator PID modelowany jest jako szeregowe połączenie regulatora PI i PD. Transmitancję takiego regulatora w rozdziale 1 opisuje wyrażenie (1.7.3). Ogólną postać tego wyrażenia można przedstawić jako wzór:

$$Kr(s) := kr\cdot\frac{(1 + s\cdot Tv)\cdot(1 + s\cdot Tr)}{s\cdot Tv}. \qquad (3.4.2)$$

Transformata wyjściowego sygnału **y** w układzie regulacji na podstawie wzoru (3.1.2) dla zrealizowanego warunku Tv = T1, Tr = T2, kompensacji działania dwóch największych inercji obiektu regulacji określa zależność:

$$y(s) := \frac{1}{s}\cdot\frac{ko\cdot kr}{ko\cdot kr + s\cdot T1 + s^2\cdot T1\cdot T3}. \qquad (3.4.3)$$

```
```

Transformata wyjściowego sygnału Δy w układzie regulacji na podstawie wzoru (3.1.1) dla zrealizowanego warunku kompensacji działania dwóch największych inercji obiektu regulacji określa zależność:

$$\Delta y(s) := \frac{1}{s}\cdot\frac{s\cdot T1\cdot ko}{\left(ko\cdot kr + s\cdot T1 + s^2\cdot T1\cdot T3\right)\cdot(1 + s\cdot T1)\cdot(1 + s\cdot T2)}. \qquad (3.4.4)$$

Charakterystykę czasową obiektu inercyjnego trzeciego rzędu określa wyrażenie: (3.4.5)

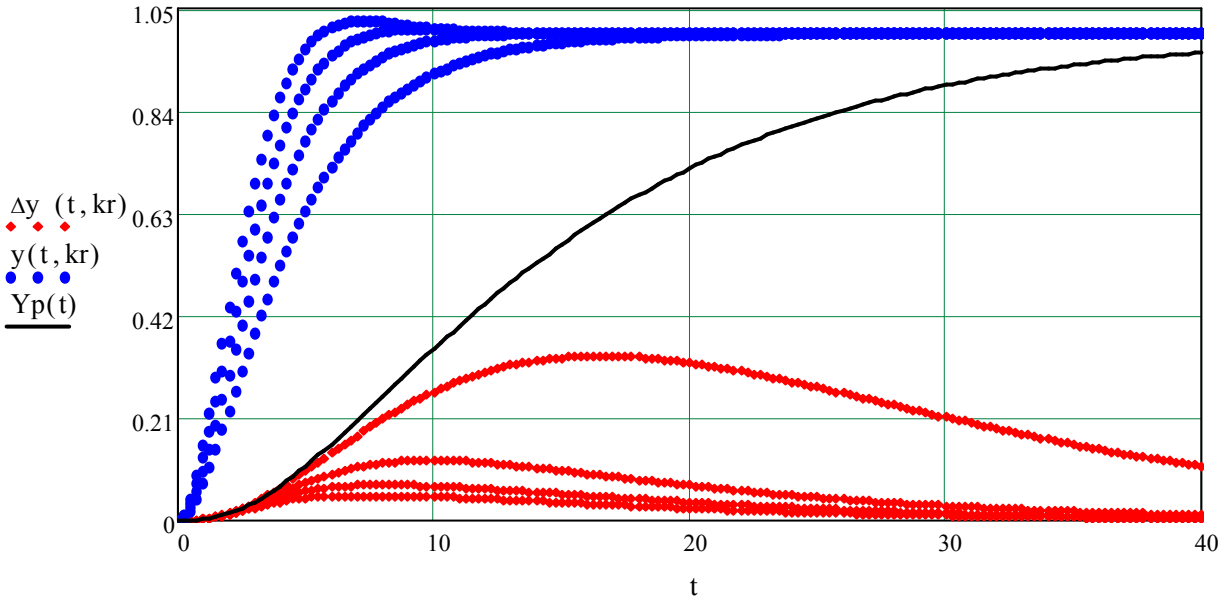
$$Yp(t) := -\frac{\begin{aligned} &T1\cdot T2^2\cdot ko - T1^2\cdot T2\cdot ko - T1\cdot T3^2\cdot ko + T1^2\cdot T3\cdot ko + T2\cdot T3^2\cdot ko - T2^2\cdot T3\cdot ko \ldots \\ &+ T1^2\cdot T2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{T1}} - T1\cdot T2^2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{T2}} - T1^2\cdot T3\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{T1}} + T1\cdot T3^2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{T3}} \ldots \\ &+ T2^2\cdot T3\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{T2}} - T2\cdot T3^2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{T3}} \end{aligned}}{(T1 - T2)\cdot(T1 - T3)\cdot(T2 - T3)}$$

Charakterystykę czasową obiektu inercyjnego trzeciego rzędu w układzie regulacji, który jest sterowanego sygnałem y_o przez regulator PID kompensujący działanie dwóch największych inercji obiektu, określa wyrażenie (postać i wynik obliczeń procesora Mathcad):

(3.4.6)

$$A(kr) := \frac{T1 - 4\cdot T3\cdot ko\cdot kr}{4\cdot T1\cdot T3^2}$$

$$y(t,kr) := -\frac{\begin{aligned} &e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\sinh\left(\frac{t\cdot\sqrt{A(kr)}}{2}\right) - T3\cdot\sqrt{A(kr)} \ldots \\ &+ T3\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot\cosh\left(\frac{t\cdot\sqrt{A(kr)}}{2}\right)\cdot\sqrt{A(kr)} \end{aligned}}{T3\cdot\sqrt{A(kr)}}$$



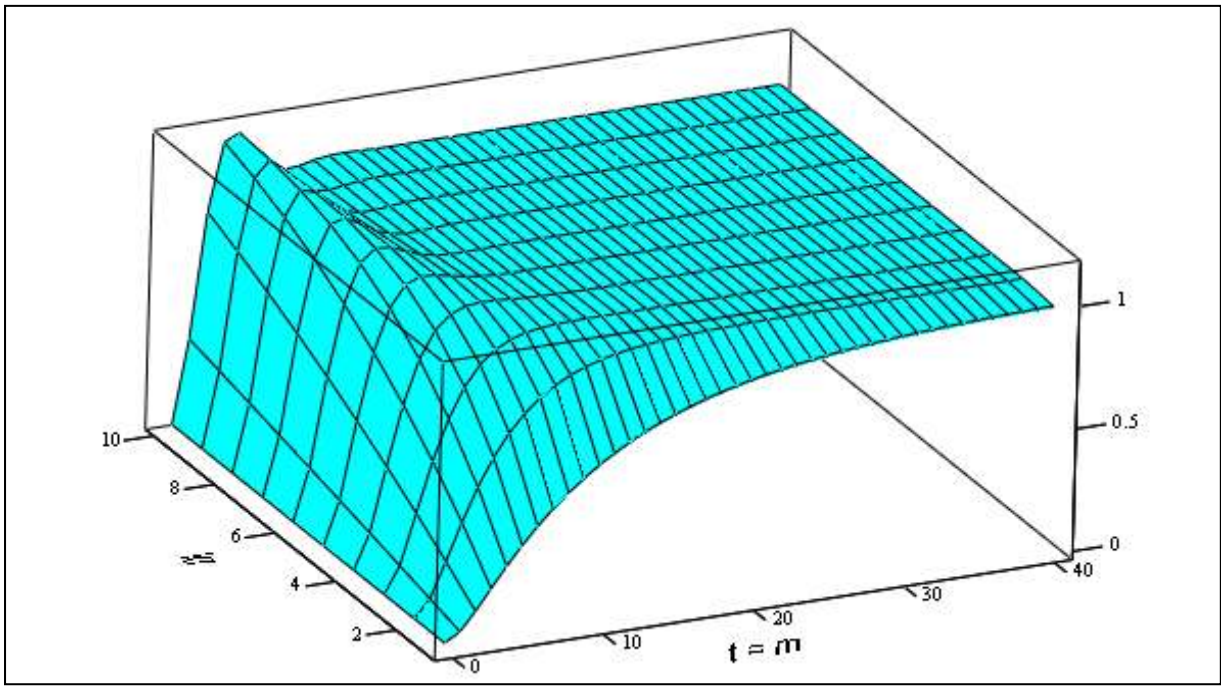
Rys. 3.4.1. Charakterystyka czasowa Yp obiektu i sygnały wyjściowe y i Δy układu regulacji, w którym zastosowano kompensacje inercji, dla: $T_V = T_1 = 10$, $Tr = T_2 = 5$, $T_3 = 1$, ko = 1, kr = 1, 4, 7, 10

Charakterystykę czasową obiektu inercyjnego trzeciego rzędu sterowanego sygnałem zakłócenia **z** przez regulator PID kompensujący działanie dwóch największych inercji obiektu określa wyrażenie (wynik obliczeń procesora Mathcad):

(3.4.7)

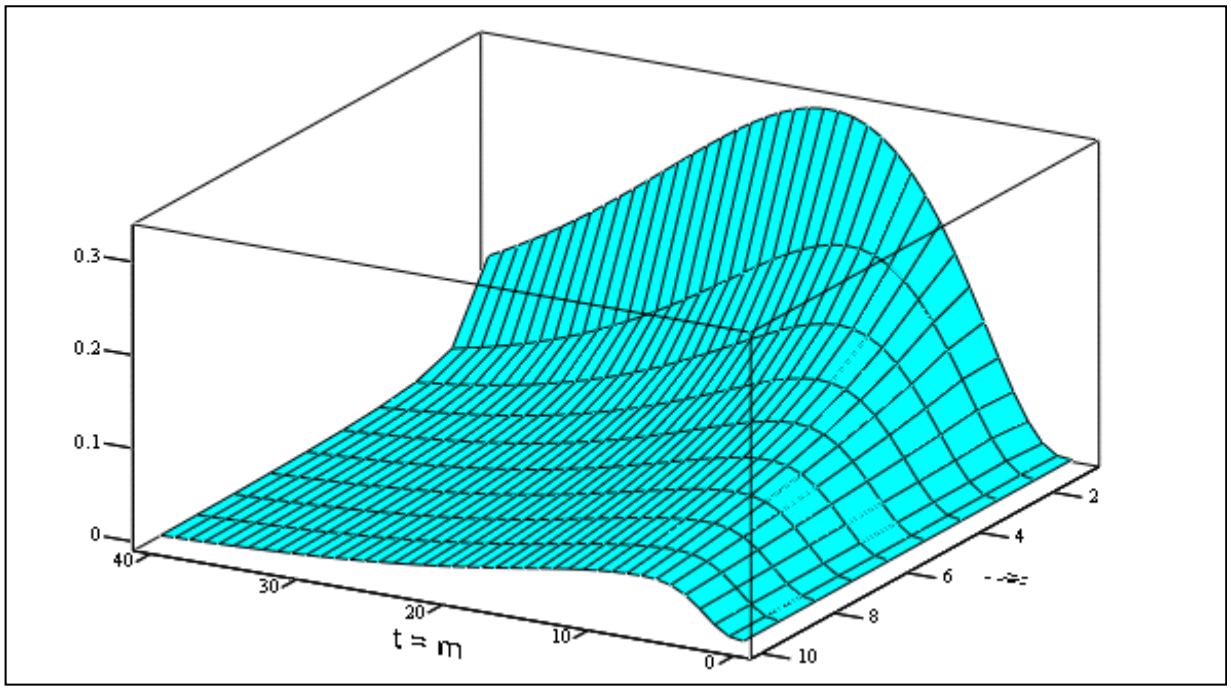
$$
\Delta y\,(t,kr) := \frac{
\begin{aligned}
&T1^3\cdot T2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot \sinh\left(t\cdot\sqrt{A(kr)}\right) - T1^3\cdot T3\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot \sinh\left(t\cdot\sqrt{A(kr)}\right) \ldots \\
&+ 2\cdot T1^3\cdot T3^2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{T1}}\cdot\sqrt{A(kr)} - T1^2\cdot T2^2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot \sinh\left(t\cdot\sqrt{A(kr)}\right) \ldots \\
&+ 2\cdot T1^2\cdot T3^2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot \sinh\left(t\cdot\sqrt{A(kr)}\right) \ldots \\
&+ \left(-2\cdot T1^3\cdot T2\cdot T3\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{T1}}\cdot\sqrt{A(kr)} - 2\cdot T1\cdot T2\cdot T3^2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot \sinh\left(t\cdot\sqrt{A(kr)}\right)\right) \ldots \\
&+ T1\cdot T2^2\cdot T3\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot \sinh\left(t\cdot\sqrt{A(kr)}\right) \ldots \\
&+ \left(-2\cdot T1^3\cdot T3^2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot \cosh\left(t\cdot\sqrt{A(kr)}\right)\cdot\sqrt{A(kr)}\right) \ldots \\
&+ \left(-2\cdot T1\cdot T2^2\cdot T3^2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{T2}}\cdot\sqrt{A(kr)}\right) \ldots \\
&+ 2\cdot T1^2\cdot T2^2\cdot T3\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{T2}}\cdot\sqrt{A(kr)} \ldots \\
&+ 2\cdot T1\cdot T2^2\cdot T3^2\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot \cosh\left(t\cdot\sqrt{A(kr)}\right)\cdot\sqrt{A(kr)} \ldots \\
&+ \left(-2\cdot T1^2\cdot T2^2\cdot T3\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot \cosh\left(t\cdot\sqrt{A(kr)}\right)\cdot\sqrt{A(kr)}\right) \ldots \\
&+ 2\cdot T1\cdot T2^2\cdot T3\cdot ko^2\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot \sinh\left(t\cdot\sqrt{A(kr)}\right) \ldots \\
&+ \left[-\left(2\cdot T1^2\cdot T2\cdot T3\cdot ko^2\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot \sinh\left(t\cdot\sqrt{A(kr)}\right)\right)\right] \ldots \\
&+ 2\cdot T1^3\cdot T2\cdot T3\cdot ko\cdot e^{-\frac{t}{2\cdot T3}}\cdot \cosh\left(t\cdot\sqrt{A(kr)}\right)\cdot\sqrt{A(kr)} \ldots \\
&+ 2\cdot T1^2\cdot T2^2\cdot T3\cdot ko^2\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{T1}}\cdot\sqrt{A(kr)} - 2\cdot T1^2\cdot T2^2\cdot T3\cdot ko^2\cdot kr\cdot e^{-\frac{t}{T2}}\cdot\sqrt{A(kr)}
\end{aligned}
}{
\begin{aligned}
&2\cdot T1^2\cdot T3^3\cdot\sqrt{A(kr)} - 2\cdot T1^3\cdot T3^2\cdot\sqrt{A(kr)} - 2\cdot T1\cdot T2\cdot T3^3\cdot\sqrt{A(kr)} \ldots \\
&+ 2\cdot T1^3\cdot T2\cdot T3\cdot\sqrt{A(kr)} + 2\cdot T1\cdot T2^2\cdot T3^2\cdot\sqrt{A(kr)} - 2\cdot T1^2\cdot T2^2\cdot T3\cdot\sqrt{A(kr)} \ldots \\
&+ 2\cdot T1^3\cdot T3^2\cdot ko\cdot kr\cdot\sqrt{A(kr)} - 2\cdot T2^3\cdot T3^2\cdot ko\cdot kr\cdot\sqrt{A(kr)} \ldots \\
&+ \left[-\left(2\cdot T1\cdot T2^3\cdot T3\cdot ko^2\cdot kr^2\cdot\sqrt{A(kr)}\right)\right] \ldots \\
&+ 2\cdot T1\cdot T2^3\cdot T3\cdot ko\cdot kr\cdot\sqrt{A(kr)} - 2\cdot T1^3\cdot T2\cdot T3\cdot ko\cdot kr\cdot\sqrt{A(kr)} \ldots \\
&+ 2\cdot T1^2\cdot T2^2\cdot T3\cdot ko^2\cdot kr^2\cdot\sqrt{A(kr)} \ldots \\
&+ 2\cdot T1\cdot T2^2\cdot T3^2\cdot ko\cdot kr\cdot\sqrt{A(kr)} - 2\cdot T1^2\cdot T2\cdot T3^2\cdot ko\cdot kr\cdot\sqrt{A(kr)}
\end{aligned}
}
$$

```
```



Y

Rys. 3.4.2. Zestawienie charakterystyk działania sygnału sterującego y_o na obiekt inercyjny trzeciego rzędu sterowany regulatorem PID, w którym zastosowano kompensacje inercji obiektu Tv = T_1 = 10, Tr = T_2 = 5, T_3 = 1, ko = 1, kr = 1, 4, 7, 10



ΔY

Rys. 3.4.3. Zestawienie charakterystyk działania zakłócenia na obiekt inercyjny trzeciego rzędu sterowany regulatorem PID, w którym zastosowano kompensacje inercji obiektu Tv = T1 = 10, Tr = T_2 = 5, T_3 = 1, ko = 1, kr = 1, 4, 7, 10

```
```

Podsumowanie

Na podstawie wyniku porównania zmian sygnałów (zob. rys. 3.4.1) w układzie regulacji obiektu inercyjnego trzeciego rzędu sterowanego regulatorem PID, w którym zastosowano kompensacje dwóch największych inercji obiektu regulacji, zauważamy, że istnieje optymalna wartość wzmocnienia kr, dla którego przeregulowanie i czas regulacji są minimalne.

3.5. Analiza kompensacji zakłóceń rzeczywistego obiektu całkującego sterowanego regulatorem PI

Ogólną analizę charakterystyk czasowych obiektu całkującego w układzie automatycznej regulacji przeprowadzono w rozdziale 3.5. Analiza kompensacji zakłóceń w układzie regulacji rzeczywistego układu całkującego i regulatora proporcjonalno-całkującego PI zostanie wykonana dla przykładu, w którym model rzeczywistego obiektu regulacji jest szeregowym połączeniem obiektu całkującego z obiektem inercyjnym pierwszego rzędu.

Transmitancję rzeczywistego obiektu całkującego i regulatora określają znane wzory:

$$K_O(s) = \frac{k_O}{s \cdot Tc \cdot (1 + s \cdot T_1)}, \tag{3.5.1}$$

$$K_R(s) = \frac{k_R \cdot (1 + s \cdot T_V)}{s \cdot T_V}. \tag{3.5.2}$$

Transmitancja otwartego układu regulacji wynosi:

$$K_{zo}(s) = \frac{k_O \cdot k_R \cdot (1 + s \cdot T_V)}{s^2 \cdot T_C \cdot T_V \cdot (1 + s \cdot T_1)}. \tag{3.5.3}$$

Transmitancja układu regulacji wynosi:

$$K_Y(s) = \frac{1 + s \cdot T_V}{1 + s \cdot T_V + s^2 \cdot \frac{T_V \cdot T_C}{k_O \cdot k_R} + s^3 \frac{T_V \cdot T_C \cdot T_1}{k_O \cdot k_R}}. \tag{3.5.4}$$

Parametry regulatora wyznaczmy na podstawie postulatu niezwłocznego działania układu regulacji. Postępując analogicznie jak w pierwszym przykładzie obliczeń z rozdziału 2.5, otrzymujemy następujące zależności:

$$T_V = 4 \cdot T_1 \quad , \quad k_R = \frac{T_C}{2 \cdot k_O \cdot T_1}. \tag{3.5.5}$$

Transmitancja układu regulacji po optymalizacji parametrów regulatora PI wynosi:

$$K_Y(s) = \frac{1 + 4 \cdot T_1 \cdot s}{1 + 4 \cdot T_1 \cdot s + 8 \cdot T_1^2 \cdot s^2 + 8 \cdot T_1^3 \cdot s^3}. \tag{3.5.6}$$

Zgodnie ze wzorem (3.1.1), tzn. $\Delta y(s) = z(s) \cdot \frac{K_O(s)}{1 + K_O(s) \cdot K_R(s)} = z(s) \cdot K_Y(s) \cdot \frac{1}{K_R(s)}$.

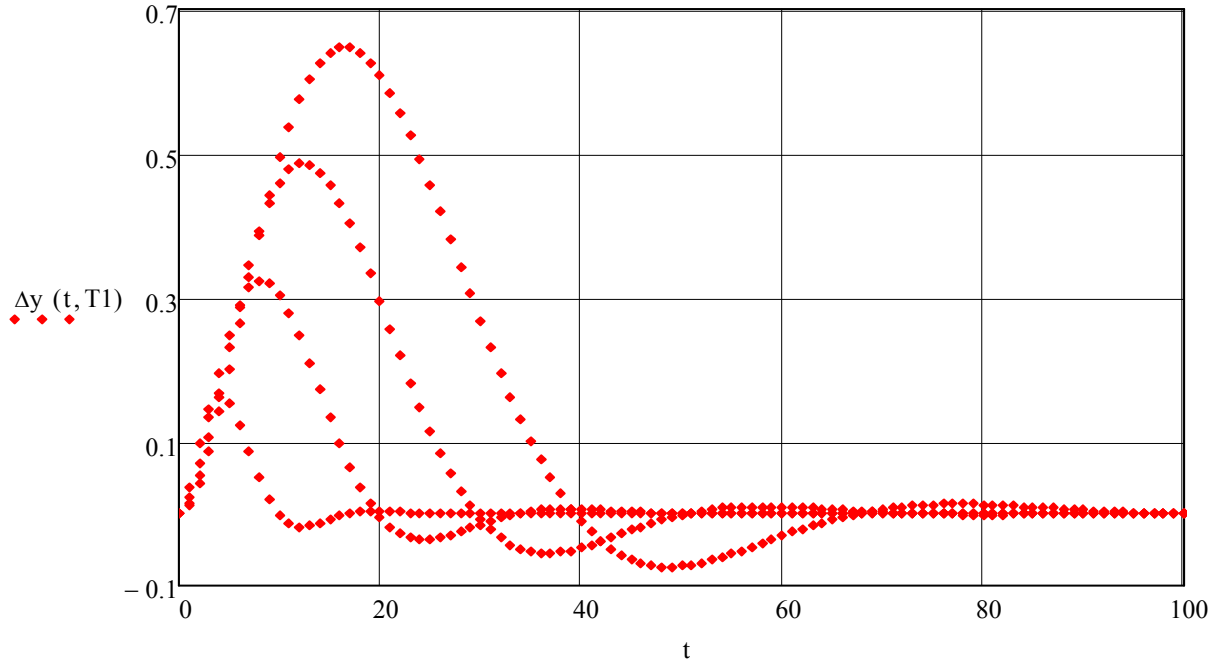
Transformata zmiany sygnału wyjściowego w układzie regulacji wywołana przez zakłócenie dla wyznaczonych wartości wzmocnienia kr i czasu całkowania T_V regulatora wynosi:

$$\Delta y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{8 \cdot k_O \cdot T_1^2 \cdot s}{T_C \cdot (1 + 4 \cdot T_1 \cdot s + 8 \cdot T_1^2 \cdot s^2 + 8 \cdot T_1^3 \cdot s^3)} \quad . \tag{3.5.7}$$

Charakterystykę czasową zmian sygnału wyjściowego Δy(t) (odwrotna transformata Laplace'a wyznaczona przez procesor Mathcada) określa wyrażenie:

(3.5.8)

$$\Delta y(t, T1) := \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(ko \cdot e^{-\frac{t}{4 \cdot T1}} \cdot \sinh\left(t \cdot \sqrt{-\frac{3}{16 \cdot T1^2}} \right) \ldots \right.}{3 \cdot Tc \cdot \sqrt{-\frac{1}{T1^2}}}$$
$$\left. + 4 \cdot T1 \cdot ko \cdot e^{-\frac{t}{2 \cdot T1}} \cdot \sqrt{-\frac{3}{16 \cdot T1^2}} - 4 \cdot T1 \cdot ko \cdot e^{-\frac{t}{4 \cdot T1}} \cdot \cosh\left(t \cdot \sqrt{-\frac{3}{16 \cdot T1^2}} \right) \cdot \sqrt{-\frac{3}{16 \cdot T1^2}} \right)$$



Rys. 3.5.1. Zmiany sygnału wyjściowego wywołane przez sygnał zakłócający dla Tc = 10, ko = 1, T_1 = 1, 2, 3, 4

Zakończenie

Wyniki modelowania właściwości obiektów liniowych i układów regulacji automatycznej z regulatorami PID przedstawione w niniejszej monografii jako graficzne zestawienia wielu charakterystyk czasowych lub częstotliwościowych wskazują, że program komputerowy Mathcad jako narzędzie wspomagające proces kształcenia studenta i doskonalące zawodowe umiejętności inżyniera stwarza duże możliwości w zakresie efektywniejszego poznawania i samodzielnego charakteryzowania właściwości dowolnych procesów regulacji automatycznej. Uzupełnieniem monografii są pliki komputerowe przedstawionych w niej przykładów.

Literatura

1. Mykhaylo Pashechko, Marcin Barszcz, Krzysztof Dziedzic,
   Zastosowanie programu Mathcad do rozwiązywania wybranych zagadnień inżynierskich,
   Wydawnictwo Politechniki Lubelskiej, Lublin 2011, ISBN: 978-83-62596-56-0.
2. Mathcad Plus 5.0. Podręcznik użytkownika. MathSoft Inc,
   ABB Poland Sp. z o.o., Kraków, ISBN: 83-902626-0-6.
3. Robert Gajewski, Marcin Jaczewski, PTC Mathcad Prime 3.0. Obliczenia programowanie,
   Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2014, ISBN: 978-83-01-18031-7.
4. Ryszard Motyka, Dawid Rasała, Mathcad. Od obliczeń do programowania. Wydawnictwo:
   Helion, Gliwice 2012, ISBN: 978-83-246-3337-1.
5. Roman Miksiewicz, Zastosowanie programu Mathcad do rozwiązywania statycznych zagadnień obliczeniowych maszyn elektrycznych i transformatorów, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2007, ISBN: 978-83-7335-383-1.
6. Piotr Jankowski, Wybrane zagadnienia elektrotechniki w środowisku Mathcad, Wydawnictwo Akademii Morskiej w Gdyni, Gdynia 2010, ISB**N:** 978-83-7421-149-9.

Informacja o autorze

Andrzej Wyszkowski – dr inż., obecnie adiunkt w Katedrze Klimatyzacji i Transportu Chłodniczego na Wydziale Techniki Morskiej i Transportu Zachodniopomorskiego Uniwersytetu Technologicznego w Szczecinie. Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Szczecińskiej (obecnie Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie), kierunku elektrotechnika, specjalności: miernictwo elektryczne i przyrządy pomiarowe.

Nauczyciel akademicki, autor innowacyjnych programów kształcenia nauczycieli edukacji technicznej i informatycznej. Za szczególne osiągnięcia w dziedzinie dydaktyki otrzymał Nagrodę Rektora Uniwersytetu Szczecińskiego. Prowadził wykłady w zakresie: elektrotechniki i elektroniki, systemów łączności, podstaw automatyki, instalacji i napędów elektrycznych, techniki pomiarowej. Autor lub współautor czterech patentów, opracowań i publikacji naukowo-technicznych lub edukacyjnych. Rzeczoznawca Stowarzyszenia Elektryków Polskich w zakresie automatyki i techniki pomiarowej. Organizator pracy, kierownik zespołów pracowniczych w trzech uczelniach wyższych w Szczecinie.

Konstruktor oraz główny wykonawca opracowań, projektów urządzeń, aparatury naukowo-badawczej i komputerowych systemów kontrolno-pomiarowych, np.: Przebudowa automatycznych systemów sterowania do załadunku i nadzoru ruchu taboru kolejowo-samochodowego na stanowiskach promowych w Bazach Morskich Polskiej Żeglugi Bałtyckiej oraz Zarządu Morskich Portów Szczecin i Świnoujście; Modernizacja sterowania procesami automatycznego natrysku wosków lakierniczych w lakierni podwozi samochodów osobowych Daewoo-FSO w Warszawie; Przebudowa przemysłowego systemu ważenia i transportu wagonów kolejowych na wielotorowym nabrzeżu portu w Szczecinie; System pomiarów wielkości nieelektrycznych metodami elektrycznymi w zakresie pomiaru zmian ciśnienia w gardle człowieka, Akademia Medyczna w Szczecinie; System komputerowej rejestracji temperatury w komorach chłodniczych, Akademia Rolnicza w Szczecinie; Przenośna bezprzewodowa sygnalizacja sterująca jednokierunkowym wahadłowym ruchem pojazdów samochodowych, komputerowy system rejestracji prób wytrzymałościowych do badań mas asfaltowych, Przedsiębiorstwo Budownictwa Drogowego „PEDIM" S.A. w Szczecinie; Komputerowy system do badania pełzania mas bitumicznych, Dyrekcja Okręgowa Dróg Publicznych w Gdańsku; Systemy programowanego sterowania procesami suszenia wyrobów ceramicznych w powietrznych komorach suszarniczych.

Obszarem zainteresowań naukowych autora są: systemy do pomiarów małych zmian masy próbek ciał stałych otoczonych gazem lub mieszaninami gazowymi w warunkach podgrzewania, stabilizacji temperatury lub chłodzenia aktywnej przestrzeni reaktora, komputerowo programowane regulatory temperatury do realizacji potrzeb nieliniowych reaktorów badawczych stosowanych w instalacjach syntezy amoniaku lub analizatorach termo-grawimetrycznych badających procesy fizykochemiczne jako zależność zmian masy badanego ciała stałego od temperatury, ciśnienia i oddziaływania składu mieszanin gazowych, które otaczają badane ciało.

Za udział w pracach naukowo-badawczych zakończonych publikacjami lub patentami otrzymał sześć Nagród Rektora Politechniki Szczecińskiej.

Z tytułu osiągnięć naukowych w zakresie analizy metrologicznej przetwornika prędkości tłoka maszyny tłokowej oraz współautorstwa opracowania i wykonania prototypowego urządzenia do pomiaru różnicy oraz rozkładu ciśnień w przewodzie pokarmowym i gardle człowieka otrzymał dwie Nagrody Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Kolejna monografia z obszaru naukowych zainteresowań autora przedstawiać będzie problemy optymalizacji doboru parametrów komputerowo programowanych regulatorów do nieliniowego sterowania procesami regulacji temperatury elektrycznie ogrzewanych pieców w termograwimetrycznych systemach pomiarowych.

WYDAWNICTWO US NAUKOWE

71-101 Szczecin, ul. Mickiewicza 66
tel. 91 444 20 06, 91 444 20 12
e-mail: wydawnictwo@univ.szczecin.pl
www.wn.usz.edu.pl

ISBN 978-83-7972-161-0